

Betongplattor, beräkning och dimensionering vid koncentrerade upplagsreaktioner och fria kanter

LARS HALLBJÖRN

INSTITUTIONEN FÖR ARKITEKTUR OCH
SAMHÄLLSBYGGNADSTEKNIK
Avdelningen för Konstruktionsteknik
Rapport ACE 2019:8

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2019
www.chalmers.se

RAPPORT ACE 2019:8

Betongplattor, beräkning och dimensionering vid koncentrerade upplagsreaktioner och fria kanter

LARS HALLBJÖRN

Institutionen för arkitektur och samhällsbyggnadsteknik
Avdelningen för konstruktionsteknik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2019

Betongplattor, beräkning och dimensionering vid koncentrerade upplagsreaktioner och fria kanter

LARS HALLBJÖRN

© LARS HALLBJÖRN, 2019

Rapport ACE 2019:8

Institutionen för arkitektur och samhällsbyggnadsteknik
Chalmers tekniska högskola, 2019

Institutionen för arkitektur och samhällsbyggnadsteknik
Avdelningen för konstruktionsteknik
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg
Sverige
Telefon: + 46 (0)31-772 1000

Universitetsservice US AB
Stockholm, 2020

Betongplattor, beräkning och dimensionering vid koncentrerade upplagsreaktioner och fria kanter

LARS HALLBJÖRN

Institutionen för arkitektur och samhällsbyggnadsteknik
Avdelningen för Konstruktionsteknik
Chalmers tekniska högskola

SAMMANFATTNING

Dimensionering av armerade betongplattor utförs i allmänhet enligt elasticitetsteori varvid finit elementmetod (FEM) mestadels tillämpas för snittkraftsberäkningen. För tolkning av beräkningsresultat och för att välja lämpliga kompletteringar har i denna utredning behandlats

- moment i och kring singulära punkter (vid koncentrerade upplagsreaktioner samt vid fritt inre hörn),
- tvärkrafter kring koncentrerade upplagsreaktioner m a p genomstansning, och
- tvärkrafter längs fria kanter och i fritt inre hörn.

Exemplen belyser hur beräkningsresultaten påverkas vid variation av olika parametrar och tolkningen ger vägledning för praktiskt konstruktionsarbete.

Plattor med pelarupplag, avslutat linjeupplag, olika typer av inåtgående hörn samt med fri kant har analyserats för jämnt fördelad belastning. Fasta, inspända, elastiska och fjädrande upplag har tillämpats. Inverkan av varierande stödväggshöjder och plattjocklekar har studerats. Mindlinelement 1,0x1,0, 0,5x0,5, 0,25x0,25 och 0,125x0,125 m har använts samt i några fall även kirchoffelement.

Böjmoment i och kring singulära punkter kan vid dimensioneringen utjämnas till medelvärden inom en medverkande bredd. Exemplet med varierande elementstorlek visar att medelmomentet blir måttligt beroende av elementstorleken. Vid fritt inre hörn inverkar inte elementstorleken. I vissa fall bör införas elastiska stöd exempelvis i form av stödjande väggar. Olika vägghöjder har prövats. Att införa fjäderförsedda upplagslinjer istället för väggar är inte rättvisande. Det bör vara en acceptabel bedömning att element med en bredd lika med plattjockleken väl avspeglar plattans funktion kring singulära punkter.

För pelarstöd och lageruppläggning kan hänsyn till stödytans storlek tas genom manuell justering av momenten i och kring den singulära punkten. Enkla formler för medelmoment och toppmoment ges.

Tvärkrafter kring koncentrerade upplagsreaktioner studeras m a p genomstansning. Metod att beräkna bärförmågan m h t stansning framgår av normer. Här behandlas följande tillhörande frågor:

- stödreaktion jämte excentricitet vid de olika plattgeometrierna,
- tilläggsfaktor för variation hos huvudtvärkraften runt stödet, samt
- inverkan av elastiska stöd.

Olika elementstorlekar ger i de studerade plattorna praktiskt taget lika stödreaktioner. Mindlinelement bör tillämpas. Elastiska stöd jämnar ut reaktioner. Huvudtvärkrafterna i en krets runt stödande resp inåtgående hörn reduceras då betydligt. En beräkning av rätvinklig och snedvinklig broplatta visar att tvärkrafterna kan fördelas icke-rotationssymmetriskt även vid centriskt belastade (ledade) pelarstöd.

Inåtgående fritt hörn är en singulär punkt. Stansningsberäkning inte aktuell. Den utförda tolkningen av plattmodellens tvärkraft stöds av en balkrostmodell.

Ett skadefall beskrivs där omfattande skjuvsprickbildning tolkas såsom orsakat av att hänsyn inte tagits till tvärkraftsvariationen kring pelarstöd.

Tvärkraften längs en fri kant utgörs av ett ”basvärde” plus ett kanttillskott där tillskottet är lika med vridmomentet strax innanför kanten. Tillskottet blir ungefär lika vid de olika elementstorlekarna. De olika beräkningsresultaten vid mindlin- resp kirchoffelement påvisas och anvisningar för tolkning ges.

I bilagor

- ges armeringsanvisningar,
- härleds analytiskt momenttopp i cirkulär platta, samt
- visas resultat av jämförande balkrostberäkningar.



Författare:

Lars Hallbjörn, Född 1939

Civing. 1963 vid KTH, Stockholm

1963 - 1968 KTH, Inst. för Brobyggnad,
forskning och undervisning

Tekn lic 1969 vid KTH, Inst. för Brobyggnad

1968 - 1975 Statens Vägverk, Brosektionen

1975 - 1988 Statens Vattenfallsverk,
Byggnadsteknik, Utveckling och kontroll

1988 – 2019... ELU Konsult AB,
Anläggningsavdelningen

2005 Foto

Innehåll

		Sida
1	Inledning	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Plan för studien	2
1.3	Tolkning av beräkningsresultat	5
1.4	Medverkande bredd	6
2	Tvärkraft i plattkanter	9
2.1	Resultat med mindlin- och kirchoffelement	9
2.2	Skjuvarmering i kant för tvärkraft parallellt kanten	11
2.3	Platta med inåtgående fritt hörn, osymmetrisk	12
2.4	Rektangulär platta med lokal last	14
3	Singulariteter hos moment	18
3.1	Allmänt	18
3.2	Pelarstöd	18
3.2.1	Platta med pelarstöd	18
3.2.2	Justering ΔM (kNm) av moment inom medv. bredd	23
3.2.3	Justering Δm (kNm/m) av toppmoment	24
3.3	Linjeupplags ände	24
3.3.1	Fast upplag	24
3.3.2	Elastiskt upplag	27
3.3.3	Elastiska fjädrar längs upplag	29
3.4	Inåtgående fritt hörn	29
3.5	Inåtgående upplagt hörn	32
3.5.1	Fast upplag	32
3.5.2	Elastiskt upplag	34
3.5.3	Elastiska fjädrar längs upplag	37
3.6	Inåtgående inspänt hörn	37
3.6.1	Inspänt upplag	37
3.6.2	Elastiskt inspänt upplag	40
3.6.3	Elastiska fjädrar längs upplag	42
4	Koncentrerade stödreaktioner, tvärkrafter	44
4.1	Allmänt	44
4.2	Stansning, excentrisk kraft	44
4.3	Pelarstöd	46
4.3.1	Inre pelarstöd	46
4.3.2	Plattbroar på ledade pelarstöd	49
4.4	Linjeupplags ände	51
4.4.1	Fast upplag	51
4.4.2	Fast upplag, större plattjocklek	53
4.4.3	Fast upplag, kirchoffelement	54
4.4.4	Elastiskt upplag	54
4.5	Inåtgående upplagt hörn	58
4.5.1	Fast upplag	58
4.5.2	Elastiskt upplag	60

4.6	Inåtgående inspänt hörn	63
4.6.1	Fast inspänt upplag	63
4.6.2	Elastiskt inspänt upplag	66
4.7	Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk	68
4.8	Skadefall, Tpl Nyboda	74
5	Sammanfattning och resultat	80
6	Referenser	84
Bilagor		
A	Armeringsanvisningar och kommentarer	85
A.1	Armering kring singular punkt	85
A.2	Komplettering med 45°-armering	86
A.3	Rutnätsarmering i avvikande riktningar	87
A.4	Stansdimensionering, tilläggsfaktor	87
A.5	Förspänd platta	88
B	Cirkulär platta	89
B.1	Krökningsradier	89
B.2	Cirkulär platta med punktlast	90
B.3	Några formler för moment	92
C	Balkroster	93
C.1	Allmänt	93
C.2	Linjeupplags ände	93
C.3	Inåtgående fritt hörn	96
C.4	Inåtgående upplagt hörn	97
C.5	Inåtgående inspänt hörn	99
C.6	Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk	101

Förord

Det är för mig en fröjd att se detta arbete färdigt. Det har vuxit fram under ett par års tid i kvällslampans sken hemmavid med datamaskinen laddad med USB-stickan som siffertankats på ELU Konsult där den huvudsakliga arbetsuppgiften för mig varit och är kontrollberäkningar av tunnelbanebroarna vid Slussen i Stockholm vilka inte får skadas men likväl rör sig under de omfattande markarbetena i åsen runtomkring. De hemtagna datorberäkningarnas resultat har budskap som framträder i det otal exceldiagram jag framställt med tanken att här får läsaren direkt se vad som händer när man skapar en platta och sedan ändrar på förutsättningarna på olika vis.

Det är med tillfredsställelse jag ser hur väl man idag bemästrar kraftanalysen jämfört med de enkla metoder som fanns tillgängliga när jag började på 1960-talet.

Jag har arbetat med forskning, experimentella provningar, undervisning, rasutredningar, betongbroar, stålbroar, rörliga broar, hängbroar, provbelastningar, vattenkraftkonstruktioner, kärnkraftverk, spänningsmätningar i berg och på senare tid ett stort antal klassningsberäkningar av broar.

De största objekten har bl a varit Trafikplats Midsommarkransen (Tpl Nyboda), Forsmarks kärnkraftverk (reaktorinneslutning m m), Igelstatron, Skurubron och Höga Kustenbron (pyloner m m).

I arbete med revidering av bronormer, betongbestämmelser och Eurokod har jag framfört synpunkter vilka ibland beaktats och ibland inte beaktats.

Periodvis har jag varit granskare vilket gett rik erfarenhet av hur konstruktörer tänker och resonerar.

För att upprätthålla och förbättra kunskap och kompetens krävs intresse, läromedel för självstudier samt praktiskt arbete.

Som ett bidrag till läromedlen har jag skrivit boken Hallbjörn, L. *Betongplattor, beräkning och dimensionering*, 218 sidor, 2015, som spridits inom ELU Konsult och till kontakter inom branschen. Den kan erhållas kostnadsfritt om man mejlar mig.

Med FEM-beräkningar av elastiska betongplattor uppstår viss komplikation vid koncentrerade upplagsreaktioner och fria kanter och hörn. Adj prof Costin Pacoste, KTH och ELU Konsult, menade att det saknades en skrift i ämnet och föreslog att jag skulle arbeta med detta, vilket resulterat i föreliggande utredning.

Här behandlas:

- moment i och kring singulära punkter (vid koncentrerade upplagsreaktioner samt vid fritt inre hörn),
- tvärkrafter kring koncentrerade upplagsreaktioner m a p genomstansning,
- tvärkrafter längs fria kanter och i fritt inre hörn, samt
- ett skadefall med anknytning till tvärkrafter.

Utvärderingar och tolkning av beräkningar jämte anvisningar om lämpliga kompletteringar visar inverkan av:

- elementtyper,
- elementstorlekar,
- justering av toppmoment och medelmoment,

- elastiska stöd,
- medverkande bredd,
- tilläggsfaktorer för genomstansningslaster, samt
- tvärkrafter vid fritt inre hörn och fria kanter.

Framställningen är inriktad på platsgjutna plattbroar, men resultaten kan tillämpas även inom övrig anläggningsbyggnad och husbyggnad. Speciell behandling av hjul- och axeltryck på ”tunna” betongplattor ingår ej.

Stort tack till adj prof Morgan Johansson, Chalmers och Norconsult AB, för många värdefulla granskningssynpunkter samt till docent Mario Plos för omhändertagande av skriften inom Chalmers publikationer.

Tack riktas också till alla intresserade kollegor på ELU Konsult för visat intresse och deltagande i interna teknikmöten samt till ELU Konsult för ekonomiskt bistånd vid tryckningen av boken.

Tack också till hustru Isabella som med tåligt jämnmod fördragit mitt idoga skärmengagemang.

Täby 7 nov 2019

Lars Hallbjörn

lars.hallbjorn@elu.se

1 Inledning

1.1 Bakgrund

I och kring singulariteter och vid kanter i FEM-modeller av betongplattor erhålls ofta beräkningsresultat som inte obearbetat kan användas för dimensionering utan måste tolkas och kompletteras.

Uppgiften i denna studie har varit att söka utforma anvisningar för hur dessa delar av plattor skall behandlas vid dimensionering. Här avses i första hand plattbroar, men resultaten kan tillämpas även på andra typer av plattkonstruktioner av armerad betong.

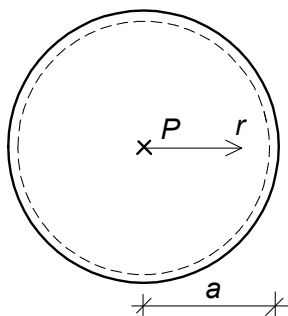
Nedan behandlas inledningsvis bakgrund vad avser singulariteter. För plattkanter hänvisas till Kapitel 2.

I en "exakt" teoretisk lösning av snittkrafterna i en tunn elastisk platta får man i vissa fall oändlighetspunkter, s k singulära punkter. För en cirkulär platta med centrisk punktbelastning finns slutna formler som visar detta för den belastade punkten. Plattan är i beräkningen mycket tunn och belastningen saknar en fördelning över viss yta, vilket leder till snittkrafter utan begränsning.

Enligt Timoshenko, Woinowsky-Krieger (1959) gäller för en fritt upplagd cirkulär platta med radien a och koordinaten r räknad från centrum att böjmomenten i radiell resp tangentiell riktning av en centrisk punktlast P blir

$$m_r = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} \quad (1.1.1)$$

$$m_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right] \quad (1.1.2)$$



Figur 1.1.1.

där ν är tvärkontraktionstalet. När r går mot noll växer momenten utan begränsning. Även tvärkraften $v_r = P / (2\pi r)$ växer utan begränsning. Härledning av ekvationerna se Bilaga B.

Singulariteten för böjmoment i en rund platta med centrisk punktlast kan visas med följande sammanfattande resonemang. Utgående från en utbredd belastning P inom en cirkel med radien c där mittmomentet $m = 0,263 \cdot P$ (kNm/m) vid lastutbredningen $c/a = 0,10$ kan vi låta lastradien c gå mot noll genom stegvis halvering av densamma. Halvering sker genom successiv superponering av en följd lastfall bestående av P nedåtriktad inom radien $c/2$ och samtidigt P uppåtriktad inom radien c . Tillskottsmomentet av varje sådant lastfall är, när c/a är ett litet värde och $\nu = 0$, $\Delta m = 0,055 \cdot P$ kNm/m oberoende av längdmått i meter. Mittmomentet växer således obegränsat.

Förfining av elementindelningen i en *elastisk FEM-modell* leder i de flesta punkter till att snittkrafterna successivt nalkas de teoretiskt "korrekta" värdena.

I singulära punkter växer däremot snittkrafterna utan begränsning när omräkning sker med allt finare elementindelning. Detta inträffar bl a vid punktupplag, linjeupplags ände och vid inåtgående hörn (utan upplag eller med upplag).

Vid grov elementindelning blir singulariteten knappt märkbar, men vid fin elementindelning blir den påtaglig.

Effekten av singularitet är inte beroende av elementstorleken i sig utan i stället av relationen mellan elementstorlek och ett karakteristiskt plattmått, exempelvis plattans spännvidd.

Följande begreppsbeskrivning behandlar pelarstöd men principen kan gälla även för andra typer av upplag.

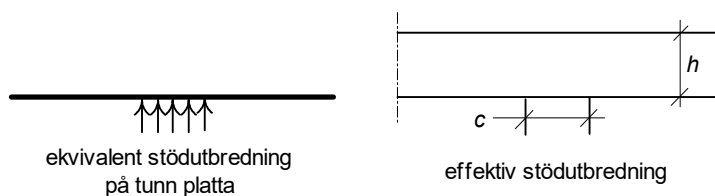
Beräknat stödmoment vid *punktupplag* och vid en viss elementstorlek har en motsvarande "*ekvivalent*" stödutbredning.

Om man tänker sig disponera en exakt beräkningsmetod för en tunn elastisk platta skulle inverkan av olika stödutbredningar kunna beräknas exakt. Den stödutbredning som skulle ge samma toppmoment som FEM-beräkningen med punktupplag kallar vi den *ekvivalenta* stödutbredningen.

I verkligheten har stödet en utbredning vilket innebär att snittkrafterna begränsas.

Den stödutbredning som korrekt motsvarar konstruktionens funktion kan benämnas "*effektiv*" stödutbredning. Denna är i princip lika med verklig stödutbredning, men modelleras i allmänhet inte exakt.

Om ekvivalent och effektiv stödutbredning är lika blir FEM-beräkningens toppmoment accepterat som gällande.



Figur 1.1.2 Platta på pelarstöd.

1.2 Plan för studien

Uppgiften har varit att utforma anvisningar för dimensionering av betongplattor i följande fall:

- moment i och kring singulära punkter (vid koncentrerade upplagsreaktioner samt vid fritt inre hörn),
- tvärkrafter kring koncentrerade upplagsreaktioner m a p genomstansning, och
- tvärkrafter längs fria kanter och i fritt inre hörn.

Beräkningar har utförts med programmet RFEM (Dlubal Software GmbH).

Finit-element-metoden (FEM) är med datorns hjälp ett utomordentligt användbart verktyg vid analys av byggnadskonstruktioners strukturella funktion.

Denna framställning omfattar inte någon beskrivning av FEM eller det använda programmet RFEM. Metoden beskrivs i exempelvis Cook, Malkus, Plesha, Witt (2001). I Hallbjörn (2015) belyses principen för virtuellt arbete elementärt och kortfattat.

Utredningen har gjorts ur konstruktörens perspektiv där beräkningsresultaten bedöms med hjälp av förfinad elementindelning och jämviktsvillkor samt med hänsyn till betongplattors funktion.

Här sker tillämpning på elastiska plattor med rätvinkliga geometrier belastade med jämnt fördelade laster och utan normalkrafter. Betongens tvärkontraktionstal har valts lika med noll. I beräkningsmodellerna är plattorna tunna. Uppträdande mycket stora snittkrafter i singulära punkter vid fin elementindelning har ingen motsvarighet i den verkliga konstruktionen, utan användaren får välja lämplig elementstorlek och tolka resultaten.

För moment i och kring singulära punkter gäller följande.

Exemplen visar hur resultatet förändras vid varierande elementstorlek. Stora element kan å ena sidan ge en alltför grov momentbild med utslätade momenttoppar och små element kan å andra sidan resultera i orealistiskt höga momenttoppar.

För varje platta utförs beräkningar med successivt halverat elementmått. Det ekvivalenta stödmåttet halveras då stegvis och momenten i den singulära punkten växer utan begränsning.

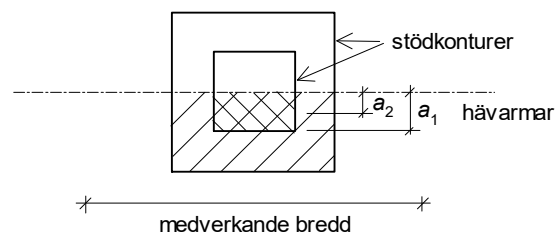
Frågan är vilken elementstorlek som bör väljas och vilka kompletteringar som bör tillfogas för att resultatet rätt skall avspegla den verkliga konstruktionens funktion.

I de olika exemplen tillämpas elasticitetsteori med kvadratiske mindlinelement och i viss utsträckning kirchoffelement. Utvärdering sker med strimlebeträktelser och med jämviktskontroller. Alternativ med elastiska stöd studeras. I bilaga görs jämförelse med balkrostmodeller.

Utgjämning av momenten kan ske till medelvärden inom en viss medverkande bredd. Detta motiveras av att böjstyvheten reduceras lokalt av betongens uppsprickning samt även av att plasticering av armeringen nås.

När elementstorleken i FEM-beräkningarna stegvis halveras avtar medelmomentökningen för varje steg när man utjämnar över den medverkande bredden. Detta gör valet av elementstorlek mindre kritiskt. Jämför med följande resonemang.

För ett pelarstöd innebär en halvering av elementmåtten att man superponerar ett lastfall bestående av en nedåtriktad fördelad stödreaktion plus en lika stor uppåtriktad stödreaktion fördelad inom en stödyta med halverat ekvivalent stödmått. När detta upprepas går hävarmsdifferensen $a_n - a_{n+1}$ mot noll och medelmomentet inom viss bredd går mot ett gränsvärde.



Figur 1.2.1 Plan vid pelarstöd.

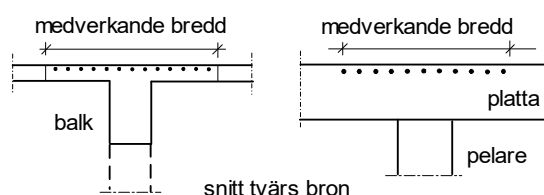
Även för övriga studerade plattor visar sig detta i princip gälla.

Arbetsgången blir:

- Välj beräkningsmodell med lämplig elementindelning. Förfina vid behov elementmåtten kring den singulära punkten. Inför elastiskt stöd där så är motiverat (dock normalt ej vid pelarstöd).

- Justera toppmomentet enligt formel med hänsyn till lokalt upplagstryck (gäller pelarstöd).
- Utjämna momenten till medelvärden inom den medverkande bredden.

Anm: Utjämningen är en vedertagen metod för pelarunderstödd balk med flänsar samt för pelardäck.



Figur 1.2.2.

För tvärkrafter kring koncentrerade upplagsreaktioner bör hänsyn tas till variationer hos tvärkraften runt stödet så att excentricitet i reaktionen jämte annan oregelbundenhet blir beaktad. Stansningsdimensionering sker då med en tilläggsfaktor. Detta studeras i exempel med fasta och elastiska stöd.

Följande plattor har beräknats i RFEM med mindlinelement med olika storlekar, $E = 30\,000$ MPa, tvärkontraktionstal $\nu = 0$. Tillägg med variationer förekommer. De valda fördelade lasterna är endast arbetsvärden utan betydelse för slutsatserna.

Tabell 1.2.1 Studerade plattor.

	Planmått (m)	Tjocklek h (m)	Fördelad last q (kN/m ²)
Pelarpuplag	20 x 20	0,4	10
Utbrett pelarstöd	20 x 20	0,4	10
Linjeupplags ände	20 x 20	0,4 0,6 0,8	10
Inåtgående fritt hörn	10 x 10	0,4	5
Inåtgående upplagt hörn	10 x 10	0,4	10
Inåtgående inspant hörn	10 x 10	0,4	10
Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk	10 x 10	0,4	5

Liknande studier skulle kunna utföras för pelarpuplag vid plattkant och vid hörn. Koncentrerade reaktioner förekommer även i sammansatta plattkonstruktioner av typ brolandfästen där bottenplatta, mur, väggar, kontreforter och fria kanter ingår.

Följande gäller allmänt för elastiska plattberäkningar.

Toppmomenten och momentdiagrammen blir desamma när plattmåten (inklusive plattjockleken vid mindlinelement) och lastbredden samt även elementmåten skalas upp eller ned med en faktor om lasten i kN behålls oförändrad.

Om en plattas sidmått ökas med en faktor, säg $= 2$, ökar nedböjningen av q -last med en faktor 16, momenten med en faktor 4 (andradervatorna av w ökar med faktorn 4) och tvärkrafterna med en faktor 2. Om samtidigt *totallasten bibehålls*, d v s q reduceras till $q/4$, blir *momenten* oförändrade, d v s lika i plattorna $a \times b$ och $2a \times 2b$. Detsamma gäller för delytebelastningar om lastytan och totallasten skalas på motsvarande sätt. För pelarstöd ökar lastytan med faktorn 4 och upplagsintensiteten reduceras till $1/4$ så att upplagskraften blir densamma.

För tvärkraft gäller motsvarande när ytlasten q halveras.

Dimensionerande böjmoment erhålls ur böjmoment plus vridmoment, se Sektion 3.1.

Beräkningsresultaten blir något annorlunda om man väljer annat tvärkontraktionstal (ex.vis $\nu = 0,2$), annan plattjocklek (vid mindlinmodell) eller annan elementtyp (kirchoff).

Vid plattberäkningar i FEM väljer man mellan att tillämpa kirchoffelement, vilka får böjdeformationer, eller mindlinelement, vilka får såväl böj- som skjuvdeformationer. Det brukar sägas att mindlinelement är att föredra vid plattor med relativt stor tjocklek i förhållande till spännvidden och att annars kirchoffelement kan användas. Som regel har detta ringa betydelse. I denna studie är tjockleken inte stor i förhållande till spännvidden, men ändå har mindlinelement valts. Detta är att rekommendera när man har singulära punkter med lokalt stora tvärkrafter, jämför Sektion 4.4 betr upplagsreaktion vid linjeupplags ände.

Med mindlinelement kan tvärkrafter vid fri kant studeras, men detta kräver fin elementindelning. Hur tvärkraften beräknas vid båda elementtyperna behandlas i Kapitel 2.

När för en viss plattgeometri plattjockleken i en mindlinmodell reduceras med en faktor ökar den *relativa* skjuvstyvheten eftersom skjuvstyvheten reduceras med denna faktor medan böjstyvheten reduceras med faktorn i tredje potens. Man närmar sig därmed en kirchoffmodell.

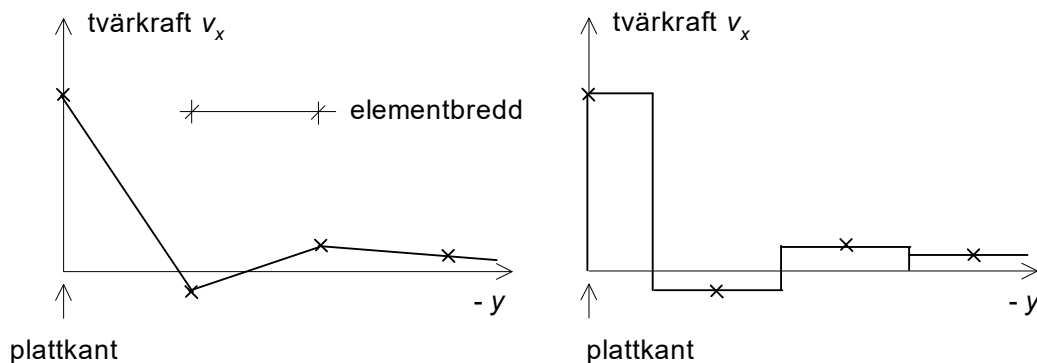
Plattdimensioner jämte laster har i exemplen inte anpassats till verkliga normala konstruktioner med väl avvägt materialutnyttjande utan är fritt valda.

1.3 Tolkning av beräkningsresultat

Integrering av snittkrafter längs en linje, exempelvis över bredden hos en plattstrimla, har utförts i form av summering av stapelytor i ett stapeldiagram. Beräkningsresultaten i samtliga ingående noder har medtagits. Stapelbredden är lika med elementbredden b_{el} utom i ändpunkterna, där stapelbredden är halverad (ensidig).

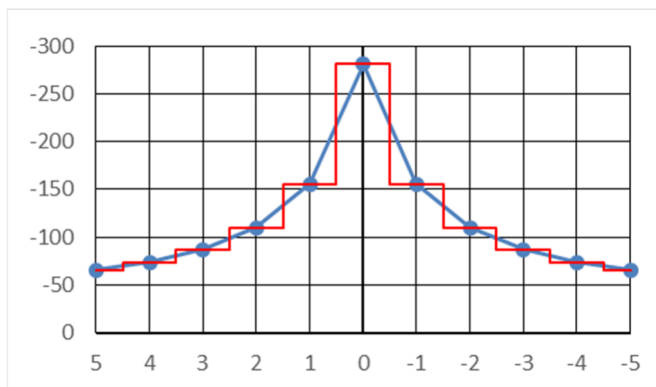
Vid integrering av böjmoment och tvärkrafter erhålls då samma resultat med stapeldiagram enligt Figur 1.3.1b som när man räknar med triangelvariation enligt Figur 1.3.1a.

Vid jämviktskontroll för momentet kring en axel i x -riktningen av tvärkraft och vridmoment längs ett snitt i y -riktningen blir det en viss skillnad. Ändpunkternas snittkrafter har antagits angripa i resp ändpunkt eller, där så angivits, i ändstapelns tyngdpunkt.



Figur 1.3.1a och b (Exempel, platta med inåtgående fritt hörn).

Exempel: En kvadratisk platta 10x10 m med fria kanter och understödd i mitten av ett inspänt punktupplag belastas med fördelad last $q = 10 \text{ kN/m}^2$. Mindlinelement 1,0x1,0 m, $\nu = 0$.



Figur 1.3.2 Tangentiellt böjmoment i mittsnitt samt stapeldiagram.

Handräknat summamoment i mittsnittet är $-10 \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot 10 = -1250$ kNm, men toppmomentets värde svarar mot en fördelad stödreaktion inom en kvadratisk stödyta med sidan $0,36 \cdot 1,0 = 0,36$ m (ekvation (3.2.2.1)) varför summamomentet korrigeras med

$$\Delta M = \frac{R}{8} \cdot (c_2 - c_1) = \frac{1000}{8} \cdot (0,36 - 0) = 45 \text{ kNm}$$

(där R är stödreaktionen) och det handräknade summamomentet blir $-1250 + 45 = -1205$ kNm.

FEM-resultatet tolkat såsom ytan under stapeldiagrammet (röd kurva) ger summamomentet $-1201,1$ kNm vilket stämmer väl med handräknat värde (differens 0,3 %).

RFEM-programmets beräkning av plattelements snittkrafter skall vara inställd på "Continuous within surfaces" för att beräknade snittkrafter inte skall utjämnas över elementgränserna. Detta har betydelse i punktupplag, längs linjeupplag och längs anslutande stödjande väggar när modellens utsträckning fortsätter på andra sidan.

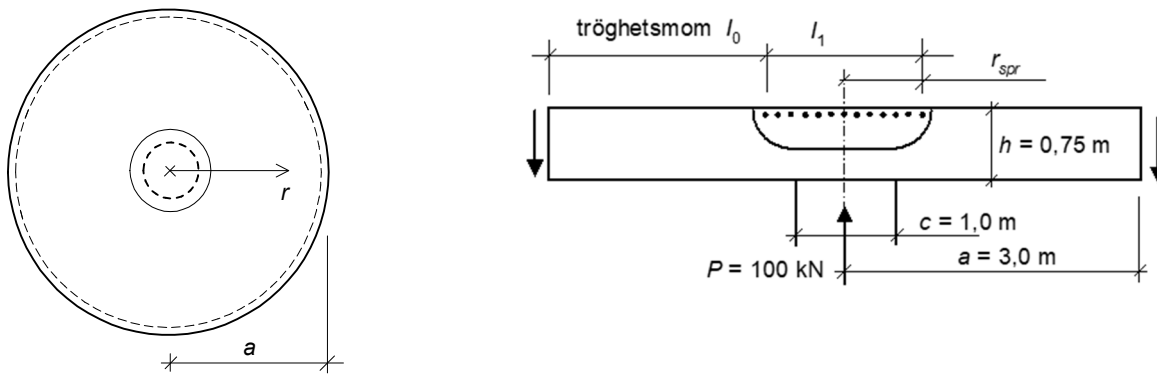
1.4 Medverkande bredd

Utgjämning av momenten kan ske till medelvärden inom en viss medverkande bredd. Detta motiveras av att böjstyvheten reduceras lokalt av betongens uppsprickning samt av att spänningen i armeringen uppnår sträckgränsen.

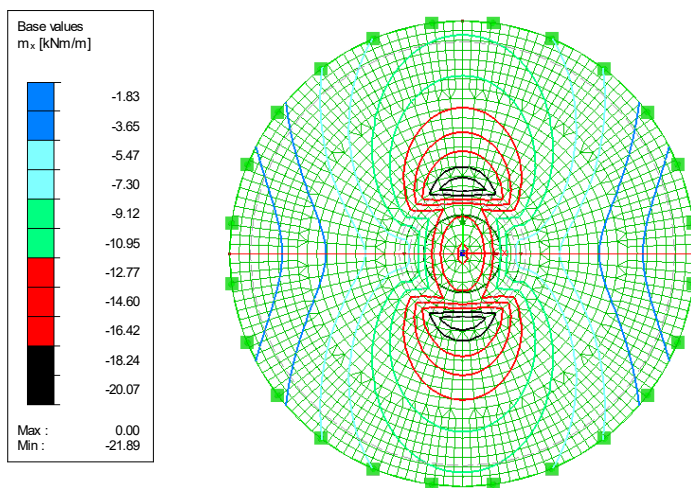
Den medverkande bredden blir beroende av plattgeometri och spännvidder samt av huruvida bruks- eller brottgränstillståndet avses. Lämpliga värden anges inte här utan hänvisning sker till normer samt till Pacoste, Plos, Johansson (2012). Dessa värden är att betrakta som maxvärden varför även mindre värden kan tillämpas.

Ett exempel medtas här som illustrerar funktionen vid uppsprickning och visar hur den medverkande bredden kan väljas. En cikulär platta på pelarstöd enligt Figur 1.4.1 belastas längs den fria kanten vervid sprickbildning uppstår över och runt pelaren. Förhållandet mellan den uppspruckna och den ospruckna delens böjstyvheter är främst beroende av armeringsprocenten.

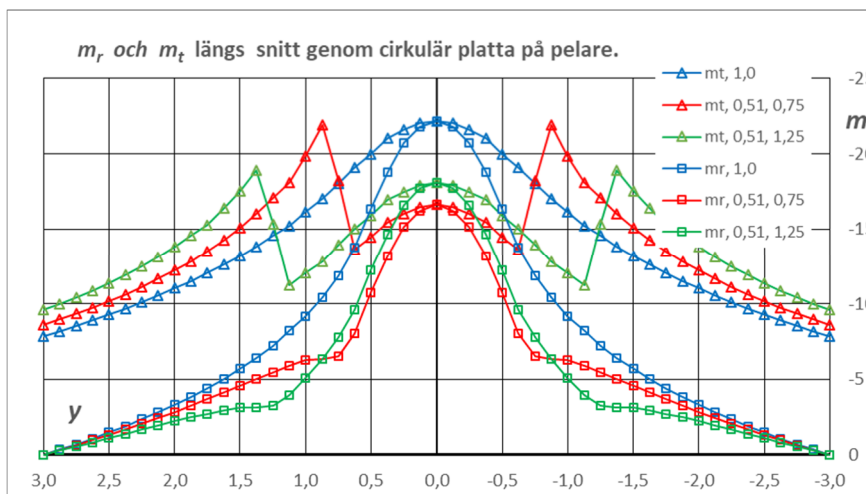
Plattan beräknades dels i osprucket tillstånd med tröghetsmomentet I_0 och dels i delvis sprucket tillstånd med $I_1 / I_0 = 0,51$ inom centrisk cirkel med radien $r_{\text{spr}} = 0,75$ resp $1,25$ m. Mindlinelement, tvärkontraktionstal $\nu = 0$.



Figur 1.4.1 Studerad platta med reducerad böjstyvhets lokalt över pelaren.



Figur 1.4.2 Moment m_x med styvhetsreduktion 0,51 i mittparti inom $r_{spr} = 0,75$ m. x -axeln är riktad åt höger. Momentet m_x ger armering i x -riktningen.



Figur 1.4.3 Tangentiella och radiella moment i snitt $x = 0$ utan och med styvhetsreduktion.

Tangentiella moment m_t (lika med m_x i snitt $x = 0$) och radiella moment m_r (m_y) framgår av diagrammet. Vi studerar här fördelningen av det *tangentiella* momentet (med triangel-symboler) för vilket armering skall inläggas i riktning vinkelrätt mot diagrammets plan. De spetsiga topparna kan anses bli utslätade när styvhetsövergången i en verklig konstruktion blir mjukare.

I bruksgränstillståndet sker uppsprickning inom en måttlig bredd och i brottgränstillståndet ökar bredden varvid toppmomentet kan begränsas av att armeringens sträckgräns uppnås.

Det tangentiella momentet fördelar sig ganska jämnt inom ca 3,0 m (röd kurva) och 4,0 m (grön kurva), varför vi bedömer att den medverkande bredden här kan anses vara lika med 3,0 resp 4,0 m. Med detta menas att momentet $m_{t,1,0}$ (blå kurva) skall integreras och fördelas inom den medverkande bredden.

Anm: Integralen av de tangentiella momenten $m_{t,1,0}$ resp $m_{t,0,51}$ i diagrammet är lika och detta har kontrollerats med momentjämvikt kring y -axeln. Att det tangentiella momentet inte är noll vid plattkanten kan förstås av att en kort korda vid kanten har en viss krökning. När r_{spr} ökar och det uppspruckna området växer närmar sig grön och röd kurva motsvarande blå kurva.

Att ovanstående beräkningsmodell är realistisk kontrolleras genom jämförelse med följande utförda försök.

I Kinnunen, Nylander (1960) redovisas omfattande experimentella provningar av cirkulära betongplattor på centriskt pelarstöd med avsikt att utforska bärförmågan vid genomstansning. Försöken visar följande uppsprickningsförlopp vid ökande belastning:

1. tangentiella sprickor ovanför stödets kant,
2. radiella sprickor utgående från de tangentiella sprickorna,
3. tangentiella sprickor längre ut,
4. slutlig skjuvspricka, böjarmeringen runt pelarstödet uppnår sträckgränsen.

I slutstadiet var hela plattan sprucken. Den yttre delen av plattan ($r > ca\ a/2$) blev dock endast radiellt sprucken och i slutstadiet före stansbrott var dessa sektorer i princip raka i radiell riktning. Töjningen i den tangentiella armeringen avtog markant (med en faktor ca 0,4) från $r = a/4$ ut till plattkanten $r = a$.

Sprickmönstret spred sig under lastökning och ur mätning av nedböjningarna erhöles att den effektiva (medel)böjstyvheten avtog successivt. Det centrala böjspruckna området med reducerad böjstyvhet vidgades.

Beräkningsexemplet ovan visar i överensstämmelse med nämnda försök att

- i den yttre delen $r > a/3$ är plattans krökning i tangentiell riktning stor jämfört med krökningen i radiell riktning och denna skillnad förstärks vid uppsprickning runt pelarstödet,
- det tangentiella momentet avtar utåt kanten med en faktor ca 0,4 i osprucket, delvis sprucket samt även i helt sprucket stadium,
- den effektiva (medel)böjstyvheten avtar successivt med ökad sprickutbredning.

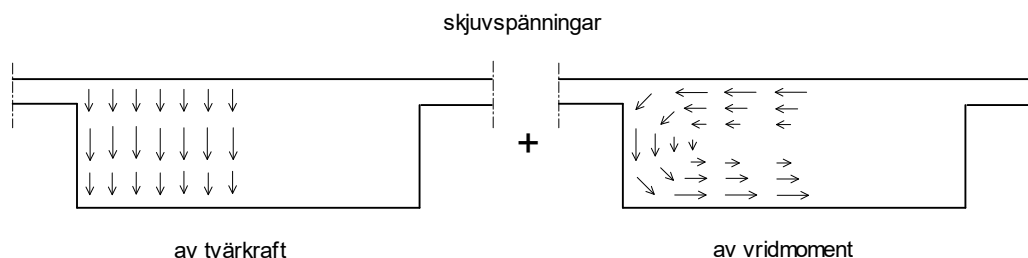
Exemplet är endast en illustration av funktionen under de valda förutsättningarna. Den medverkande bredden för det *tangentiella* momentet sträcker sig ut till 0,5 à 0,7 gånger avståndet till det *radiella* momentets nollinje.

Praxis för normala geometrier är att sätta den medverkande bredden till åtminstone 3 à 4 x plattjockleken. Beroendet av tjockleken bedöms vara befogat även om en variation av detta mått inte skulle påverka resultatet i exemplet ovan. För platta på inåtgående hörn utsträcks den medverkande bredden ensidigt.

2 Tvärkraft i plattkanter

2.1 Resultat med mindlin- och kirchoffelement

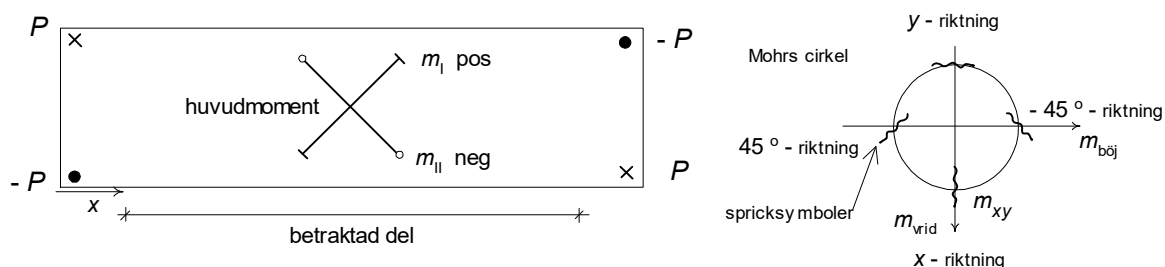
Mot en plattkant i x -riktningen avtar vridmomentet m_{xy} mot noll vid kanten och ersätts inom en bredd ungefär lika med halva plattjockleken av en vertikal tvärkraft, se Figur 2.1.1 (som visar en sektion av en bro med konsolplattor). Den vänstra delfiguren visar tvärkraftens "basvärde" (kN/m) och den högra visar tvärkraftens "kanttillskott" (kN).



Figur 2.1.1 Skjuvspänningar vid plattkant vilka ger tvärkraftens "basvärde" (kN/m, vänstra delfiguren) resp "kanttillskott" (kN, högra delfiguren).

Detta framgår i beräkningar med *mindlinelement* och blir tydligt vid fin elementindelning i kantområdet. I diagram avtar alltså m_{xy} mot små värden vid kanten medan tvärkraften v_x (parallellt kanten) ökar till ett spetsvärde (som inte är en singulär punkt). Detta inträffar längs *fri kant* och även vid en *fritt upplagd kant*. Att tvärkraft uppkommer längs en (rak) fritt upplagd kant förstås av följande exempel.

I en vriden rektangulär platta enligt Figur 2.1.2 uppstår lokala tvärkrafter (kanttillskott) $\approx \pm P/2$ (se nedan) längs kanterna. Inom den betraktade delen är kanterna raka och exempelvis den nedre långsidan skulle kunna vara fritt upplagd utan att spänningstillståndet skulle förändras (annat än lokalt vid hörnen). Man kan också formulera det så här: Välj fri uppläggning längs båda långsidorna och belasta med a) egenvikt, b) triangulärt fördelad stödsättning längs en långsida, plus c) valfri yttre last. Lastdel b) ger de nämnda tvärkrafterna längs kanten och lastdel c) kan också bidra.



Figur 2.1.2 Platta med vridande kraftpar i hörn.

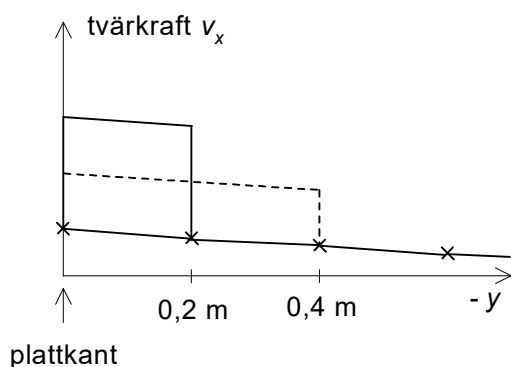
De horisontella skjuvspänningarna av vridmomentet är en komponent av böjspänningar i huvudmomentriktningarna. Det horisontella skjuvflödet i under- och överkant är m_{xy}/z (kN/m) där z är den inre hävarmen.

Andelen vridmoment av horisontellt skjuvflöde är $M_{T1} \approx m_{xy} b$ där b är plattbredden. Andelen av vertikalt skjuvflöde i kanter är $M_{T2} \approx (m_{xy}/z) \cdot z \cdot b = m_{xy} b \approx M_{T1}$.

Det totala yttre vridmomentet $M_T = P \cdot b = M_{T1} + M_{T2}$ i den vridna plattan ovan tas alltså med ungefär hälften av vridmoment m_{xy} i plattan och med ungefär hälften av kraftparet bestående av kanttillskotten $\approx \pm P/2$.

Längs en *inspänd kant* är vridmomentet $m_{xy} \approx 0$ och den längsgående tvärkraften v_x liten. Den ökar inte vid små element.

I beräkningar med *kirchoffelement* är bilden annorlunda. Elementen tilldelas inte någon tvärkraftsdeformation, vridmomenten avtar inte mot noll i kanten och tvärkraften v_x får inget lokalt tillskott vid kanten. Jämvikten är inte tillfredställd. Tvärkraftsdiagrammet måste manuellt kompletteras med ett kanttillskott lika med m_{xy} såsom figuren nedan visar. Vridmomentet har dimensionen kraft (kN) och denna kraft fördelas på den effektiva bredden för vridning som inte bör sättas större än halva plattjockleken.



Figur 2.1.3 Tillskott = m_{xy} (kN) vid kirchoffelement, två alternativ.

I Sektion 2.4 jämförs beräkningsresultat med mindlin- och kirchoffelement. Tvärkraftens basvärde och kanttillskott framgår tydligt.

Tabell 2.1.1 Sammanfattning för en fri kant i x -riktningen.

	mindlinelement ger	kirchoffelement ger
m_{xy}	\approx noll	m_{xy} (utan avtrappning)
v_x	basvärde och kanttillskott (m_{xy})	basvärde (utan kanttillskott (m_{xy}))
v_y	\approx noll	$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ *)

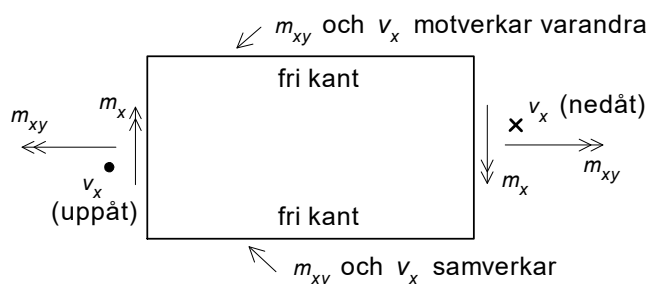
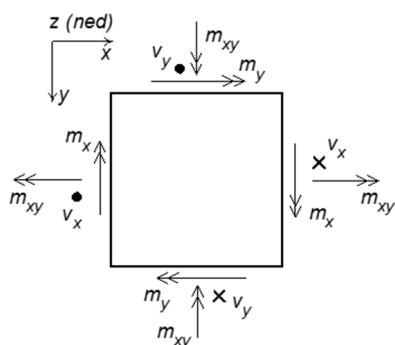
*) Kantvillkoret vid kirchoffelement är: $v_{y,\text{eff}} = v_y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0$. Vid fritt upplagd kant gäller

för upplagsreaktionen: $r_{y=a} = v_y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$

Oberoende av FEM-elementtyp gäller följande.

Koordinatsystem och teckenregler för storheter enligt Figur 2.1.4 kan anses vara en grundstandard. Nedåtriktade laster blir positiva när z -axeln är nedåtriktad. Ofta väljs z -axeln uppåtriktad, varvid y -axeln blir omvänd och lasterna ges negativa värden. I FEM-beräkningar måste de aktuella teckenreglerna klarläggas.

Figur 2.1.5 visar en platta med långsidorna fria och kortsidorna belastade som symbolerna visar. I den nedre långsidan samverkar m_{xy} och basvärdet v_x , båda med positivt tecken. I den övre långsidan motverkar m_{xy} och basvärdet v_x varandra eftersom kanttillskottet av m_{xy} är negativt (jämför exempel i Sektion 2.4). Den resulterande tvärkraften blir alltså olika på de båda långsidorna.



Figur 2.1.4 Positiva storheter.

Figur 2.1.5 Sam- och motverkan vid fria kanter.

Största tvärkraft i sned riktning ("huvudtvärkraften") i en punkt är $v_{\max} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Detta är tvärkraftens resultant och tvärkraften i den vinkelräta riktningen är noll.

2.2 Skjuvarmering i kant för tvärkraft parallellt kanten

Kanten tvärkraftsdimensioneras för summan av "vanlig" tvärkraft ("basvärde") och kanttillskott.

Ur en beräkning med *kirchoffelement* framgår basvärdet direkt och till detta adderas manuellt ett kanttillskott lika med m_{xy} (kN).

Ur en beräkning med *mindlinelement* framgår summan av basvärde och kanttillskott, men *kanttillskottet* kan samlas ihop (integreras) till en kraft (kN) som placeras i kanten. Härvid bör elementstorleken vara lika med ca halva plattjockleken eller mindre så att vridmomentet vid kanten blir relativt litet. Tillskottets bredd är olika beroende av elementstorleken men det integrerade värdet blir ungefär lika vid de olika tillämpade små elementstorlekarna som framgår av Sektion 2.3.

När man i praktiken tillämpar större mindlinelement och erhåller vridmoment i den fria kanten som inte är små får man förfara enligt principen för kirchoffelement. Man avläser tvärkraftens basvärde och vridmomentet på visst avstånd från kanten där kantvariationen är knappt märkbar. Tvärkraftens kanttillskottet sätts lika med detta vridmoment.

Kanttillskottet påförs inom den effektiva bredden för vridning som inte bör sättas större än halva plattjockleken för såväl icke skjuvarmerad som skjuvarmerad kant.

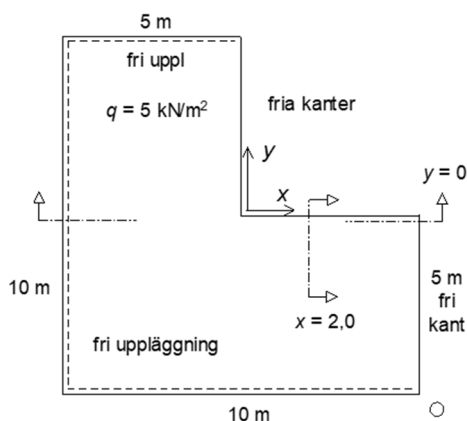
För vridmoment i *balkar* armerar man med rutnät på i princip samma sätt som man armerar en platta för vridmoment.

Vertikal skjuvarmering i balkar dimensioneras med fackverksanalogi för vertikal jämvikt i en sned spricka varvid man normalt inte dimensionerar någon fördelad horisontell skjuvarmering. Istället utförs förstärkning av böjarmeringen i form av ett tvärkraftspåslag (eller förskjutning av momentkurvan).

Vid kanten av en platta kan man skjuvarmera såsom i en balk med tillägg för kanttillskottet. När skjuvarmering beräkningsmässigt inte behövs drar man plattans (tvärgående) vridarmering runt kanten och när skjuvarmering behövs dimensioneras kanten för basvärde plus kanttillskott.

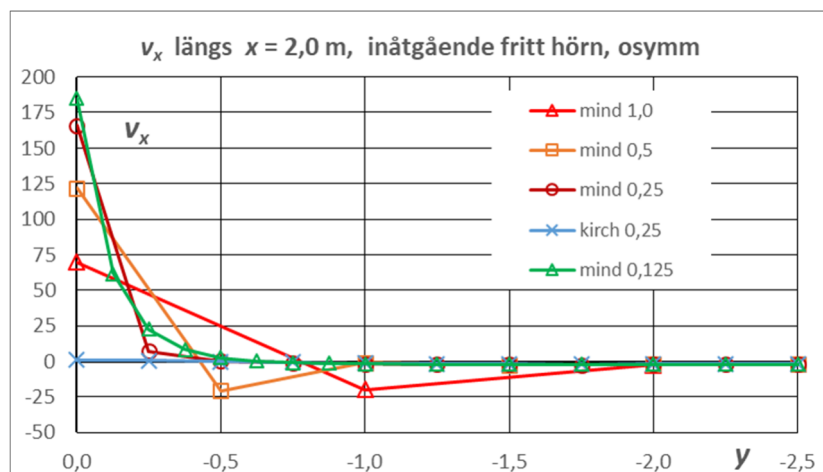
2.3 Platta med inåtgående fritt hörn, osymmetrisk

En elastisk platta 10 x 10 m enligt Figur 2.3.1 med ett inåtgående hörn och med tre fritt upplagda kanter samt med tre fria (ej understödda) kanter har beräknats med kvadratiska mindlin- och kirchoff-element med olika storlekar: 1,0, 0,5, 0,25, och 0,125 m (mindlin) resp 0,25 m (kirchoff). $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 5$ kN/m². Med benämningen "osymmetrisk" menas här osymmetri kring diagonalen $y = x$ (i uppläggning) till skillnad från den liknande platta som studeras i Sektion 3.4. Anledningen till att denna variant valts är att vi här får en markant tvärkraft längs den fria kanten till höger om det inre hörnet i planfiguren. Denna platta studeras också i Sektion 4.7 vad gäller tvärkrafter intill inre hörn. Där visas också moment- och tvärkraftsplaner.

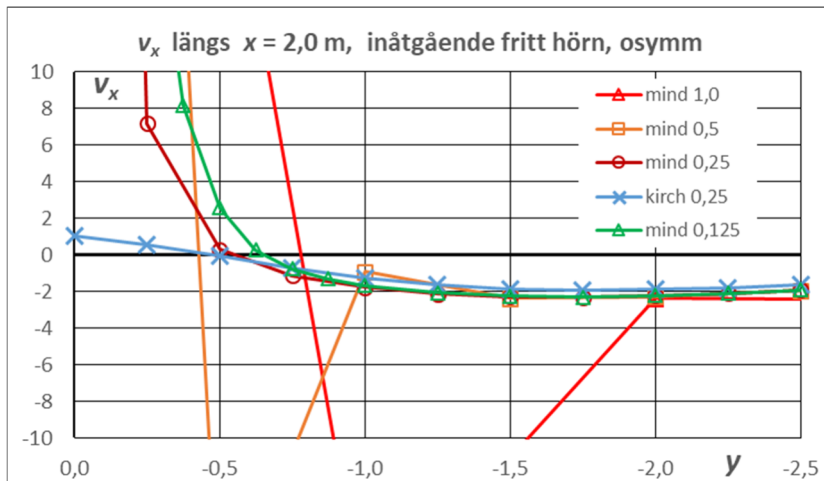


Figur 2.3.1.

Tvärkraftsvariationen i snittet $x = 2,0$ m visas i Figur 2.3.2a. Figur 2.3.2b är en lokal förstoring av Figur 2.3.2a. Längs större delen av (hela) snittet $x = 2,0$ m är tvärkraften v_x i detta fall mycket liten. Den högra tredjedelen av plattan "hänger" till viss del i en kantstrimla längs $y = 0$. Jämför Figur 4.7.6 samt Figur C.6.3.



Figur 2.3.2a.



Figur 2.3.2b Lokal förstoring av diagram a.

Tabellen nedan visar total tvärkraft V_{x1} inom 1,0 m bredd i kantzonen ($y = 0$ till $-1,0$, räknat utifrån stapeldiagram) samt m_{xy} vid kanten och ett stycke från densamma.

Tabell 2.3.1

Snitt $x = 2,0$ m	V_{x1} (kN)	m_{xy} kNm/m vid fri kant	m_{xy} kNm/m 0,5 m från kant
mindlin 1,0x1,0	24,9	-14,1	-24,6 (1 m från kant)
” 0,5x0,5	19,9	-10,2	-23,7
” 0,25x0,25	22,1	-7,7	-23,0
” 0,125x0,125	23,1	-4,3	-23,2
kirchoff 0,25x0,25	-0,1	-22,9	-22,2

Tvärkraftens basvärde är i detta fall nära noll (se högra delen av Figur 2.3.2) och V_{x1} är därför här lika med kanttillskottet, som blir ganska lika med de olika mindlinelementstorlekarna samt även lika med det manuella tillskottet m_{xy} för kirchoffmodellen (som skall teckenändras eftersom det samverkar med V_{x1} i kanten).

I Sektion C.6 beskrivs en motsvarande beräkning med en balkrostmodell. Summan av tvärkrafterna i balk $y = -0,25$ och $y = -0,75$ blev $19,9 + 2,7 = 22,6$ kN. Vid tvärkraftsdimensionering av kanten i en balkrostmodell påförs inget kanttillskott i form av vridmoment eftersom detta redan ingår i tvärkrafterna.

Jämför de gulmarkerade värdena. Dessa är nästan lika. Ok.

Resultat:

Kanttillskottet för tvärkraft kan avläsas som

- som vridmomentet på visst avstånd från kanten (mindlin) där kantvariationen är knappt märkbar; avståndet kan vara lika med två elementbredder eller 1,0 eller 2,0 x plattjockleken,
- ur v_x -kurvan vid små mindlinelement,
- som vridmomentet i kanten vid kirchoffelement.

Det kan för mindlinelement hävdas att en korrekt utvärdering ur v_x -kurvan kräver att fyra rader av element med storleken $b_{el} = h/4$ tillämpas så att vridmomentet i kanten blir nära noll. En bedömning med ledning av resultatet ovan är att det räcker med elementstorleken $b_{el} \approx h/2$ så att vridmomentet i kanten reducerats till ca en tredjedel eller mindre.

Anm. Sektion 2.4 nedan visar ett fall med tydlig uppdelning på basvärde och kanttillskott.

Med beaktande av tvärkraft och vridmoment längs hela snittet $x = 2,0$ m kan momentjämvikten kring upplagslinjen $y = -5,0$ m kontrolleras. Tolkat med stapeldiagram erhålls:

mindlinelement $0,5 \times 0,5$: $M_{T,vx} + M_{T,mxy} = 93,94 + 84,93 = 178,9$ kNm

” $0,25 \times 0,25$: $M_{T,vx} + M_{T,mxy} = 95,62 + 86,72 = 182,4$ kNm

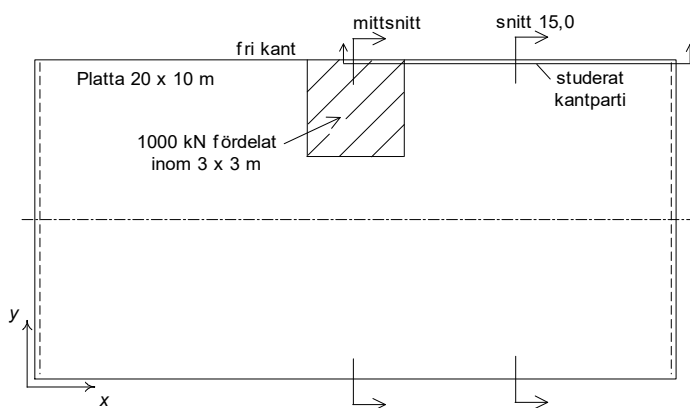
” $0,125 \times 0,125$: $M_{T,vx} + M_{T,mxy} = 97,56 + 87,43 = 185,0$ kNm

Momentet av yttre last är $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2,5 = 187,5$ kNm. Avvikelserna är 4,6, 2,7 resp 1,3 %.

2.4 Rektangulär platta med lokal last

Följande exempel är hämtat från Hallbjörn (2015). Av Figur 2.4.4 framgår variationen hos vrimoment och tvärkraft vid de fria kanterna.

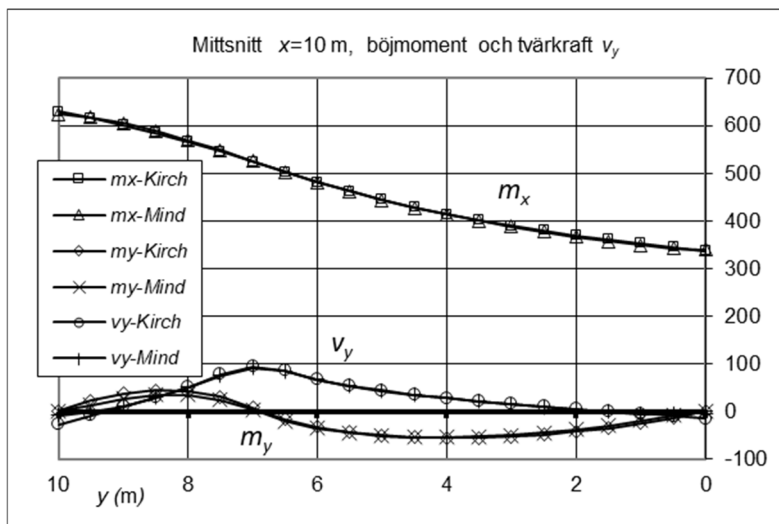
En fritt upplagd platta i ett spann enligt Figur 2.4.1 med lokal ytlast intill fri kant beräknas med FEM med kirchoff- resp mindlinelement $0,5 \times 0,5$ m. Plattjocklek $h = 1,0$ m, $\nu = 0$. Nedan studeras snittkrafter dels i två snitt tvärs plattan och dels längs fri kant. Avsikten är att jämföra resultaten, visa randeffekter och att kontrollera jämvikten.



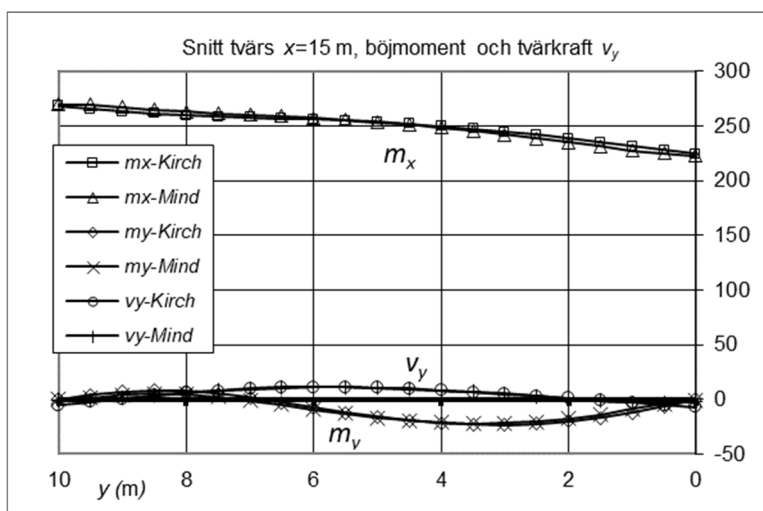
Figur 2.4.1 Studium av snittkrafter i snitt tvärs plattan och längs fri kant.

Böjmomenten m_x och m_y (kNm/m) samt tvärkraften v_y (kN/m) i mittsnitt och snitt $x = 15$ m jämförs i diagram nedan. Resultaten är överensstämmande.

Plattjockleken är liten relativt spannvidden. Hade vi valt stor plattjocklek hade resultaten med mindlinelement förändrats.

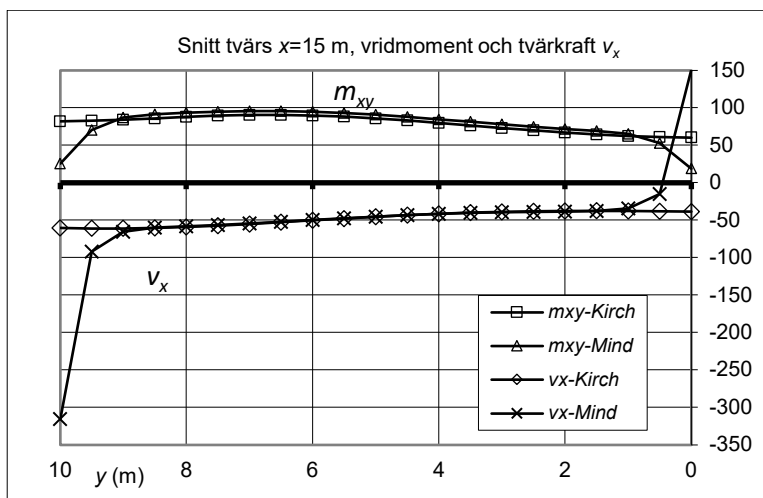


Figur 2.4.2 Jämförelse av resultat i mittnytt med kirchoff- resp mindlinelement.



Figur 2.4.3 Jämförelse av resultat i snitt $x=15$ m med kirchoff- resp mindlinelement.

Vridmomentet m_{xy} och tvärkraften v_x i snitt $x = 15$ m jämförs i Figur 2.4.4. Här framgår skillnader intill de fria kanterna. Med mindlinelement närmar sig vridmomentet värdet noll (tydligare ju mindre elementen är) medan tvärkraften växer till ett spetsvärde. Hur detta stämmer med jämviktsvillkoren studeras.



Figur 2.4.4 Jämförelse av vridmoment och tvärkraft v_x i snitt $x=15$ m med kirchoff- resp mindlinelement.

Jämviktskontroll för tvärkraft med kirchoffelement utförs med förutsättningen att varje beräknat snittkraftsvärde motsvarar en stapel med motsvarande höjd. Stapelbredden är 0,5 m resp för ändvärdena 0,25 m.

Summa V_x blir - 478,5 kN, vilket avviker 4,3 % från rätt värde -500 kN. Denna kontroll är inte komplett.

Vid fria kanter har vi även icke redovisade lokala tvärkrafter motsvarande vridmomentet m_{xy} . Dessa är 81,6 resp 60,1 kNm/m och vi erhåller

$$V_x = -478,5 - 81,6 + 60,1 = -500 \text{ kN}$$

vilket stämmer med rätt värde -500 kN. Valt tecken hos dessa tillskott svarar mot den yttersta kraften när vridmomentet tänkes representerat av ett vertikalt kraftpar.

Jämviktskontroll för tvärkraft med mindlinelement.

Summa V_x blir - 498,8 kN, vilket avviker 0,2 % från rätt värde - 500 kN.

Jämviktskontroll för vridmoment med kirchoffelement utförs på motsvarande sätt.

Summa vridmoment kring mittlinjen $y = 5,0 \text{ m}$:

av v_x	252,2 kNm	motsvarar	14,4%
av m_{xy}	788,0 kNm	”	45,1%
av v_x i kanterna	$81,6 \cdot 5,0 + 60,1 \cdot 5,0 = 708,5 \text{ kNm}$	”	40,5%
summa	1748,7 kNm		

Rätt värde är $500 \text{ (kN)} \times 3,5 \text{ (m)} = 1750 \text{ kNm}$, avvikelse = 0,1 %.

Jämviktskontroll för vridmoment med mindlinelement.

Summa vridmoment kring mittlinjen $y = 5,0 \text{ m}$:

av v_x	923,0 kNm	motsvarar	53,7 %
av m_{xy}	794,8 kNm	”	46,3 %
summa	1717,8 kNm		

Rätt värde är $500 \text{ (kN)} \times 3,5 \text{ (m)} = 1750 \text{ kNm}$, avvikelse = 1,8 %.

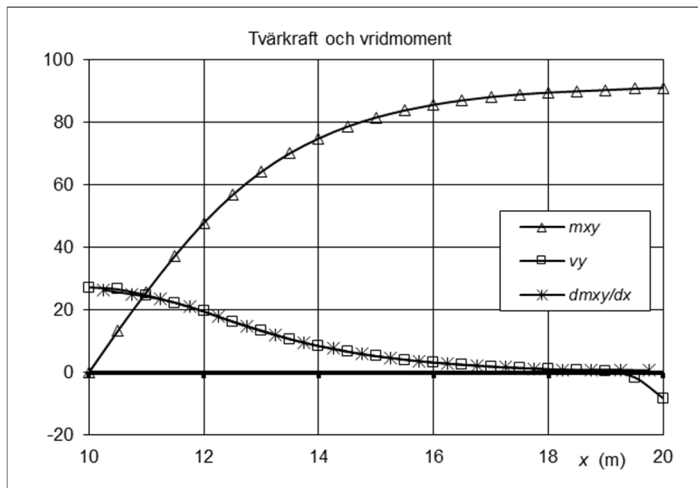
De koncentrerade tvärkrafterna vid fri kant visas alltså inte i kirchoffmodellen men de avspeglas i upplagsreaktionen som får toppvärden vid hörn. Mindlinmodellens avvikelser kan reduceras med finare elementindelning längs kanterna.

Kirchoffmodellens randvillkor vid fri kant kontrolleras enligt följande.

$$v_{y,\text{eff}} = v_y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.4.1)$$

Derivatan av m_{xy} bildas genom differenser mellan näraliggande värden. (Erhållna snittstorheters tecken måste kontrolleras och vid behov omkastas.)

Resultat se Figur 2.4.5. Kurvorna för v_y och $\partial m_{xy}/\partial x$ sammanfaller och $v_{y,\text{eff}}$ enligt uttrycket ovan blir \approx noll vilket är korrekt.



Figur 2.4.5 Kontroll av randvillkor vid fri kant $x=10$ till 20 m, kirchoffmodell.

3 Singulariteter hos moment

3.1 Allmänt

Fem elastiska jämntjocka plattor 20x20 resp 10x10 m med olika uppläggning har beräknats med RFEM. Tre av dem har inåtgående hörn. Tjocklek 0,4 m, tvärkontraktionstal $\nu = 0$, ytlast $q = 10$ (resp 5) kN/m².

Beräkning har skett med mindlinelement 2,0 x 2,0 m, 1,0 x 1,0 m, 0,5 x 0,5 m, 0,25 x 0,25 m, 0,125 x 0,125 samt i några fall 0,0625 x 0,0625 m.

I följande kapitel redovisas:

- m_x (och i ett fall m_y) i form av momentplaner över hela plattan, element 0,5 x 0,5 m,
- m_x och m_y längs snittet $x = 0$ (y -axeln) för alla elementstorlekarna,
- studier av medelmoment i plattstrimlor vid olika elementstorlekar,
- alternativ med elastisk uppläggning i några fall.

Toppmomenten och momentdiagrammen blir desamma när plattmåten (vid mindlinelement även plattjockleken) skalas upp eller ned med en faktor om totallasten i kN behålls oförändrad, jämför Sektion 1.2.

Dimensionerande moment i x - och y -riktning är

$$\text{uk armering: } m_{Ex} = m_x + k_1 \cdot |m_{xy}| \quad m_{Ey} = m_y + \frac{1}{k_1} \cdot |m_{xy}| \quad (3.1.1)$$

$$\text{ök armering: } m_{Ex} = m_x - k_2 \cdot |m_{xy}| \quad m_{Ey} = m_y - \frac{1}{k_2} \cdot |m_{xy}| \quad (3.1.2)$$

där k_1 och k_2 är valda positiva koefficienter, exempelvis = 1,0.

Momentplanerna m_x för de tre platttyperna med inåtgående hörn visar *höga sidotoppar* strax intill hörnet, närmare bestämt en elementbredd från hörnet. Vid finare elementindelning ökar toppens höjd och närmar den sig själva hörnet. Här skall observeras att huvudmomentet liksom även dimensioneringsmomentet $m_x + |m_{xy}|$ är *större eller av samma storleksordning i själva hörnet*. Vridmomentet är stort i hörnet och detta visas inte i diagrammen.

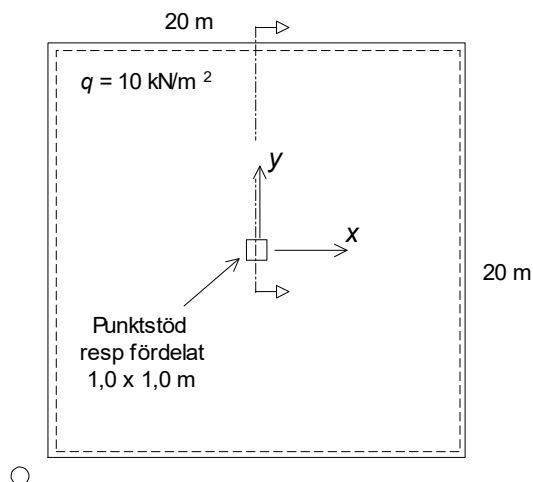
RFEM-programmets beräkning av plattelements snittkrafter skall vara inställd på "Continuous within surfaces" för att beräknade snittkrafter inte skall utjämnas över elementgränserna. Detta har betydelse i punktupplag, längs linjeupplag och längs anslutande stödjande väggar när modellens utsträckning fortsätter på andra sidan.

3.2 Pelarstöd

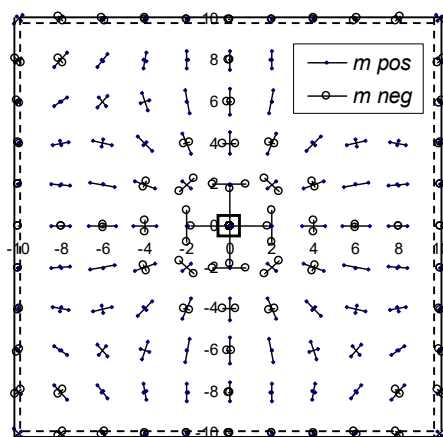
3.2.1 Platta med pelarstöd

Här studeras en fritt upplagd platta 20 x 20 m enligt Figur 3.2.1.1 med centriskt pelarstöd dels i form av punktupplag och dels i form av fördelad stödyta 1,0 x 1,0 m, $h = 0,4$ m.

Fördelad last $q = 10$ kN/m². Pelarstödet har i modellen utformats dels som ett punktupplag (nodupplag) samt dels som en kvadratisk stödyta 1,0 x 1,0 m i form av en uppåtriktad ytlast om 1413 - 1453 kN/m² resulterande i att nedböjningen i mittpunkten blir noll. FEM-beräkningar har utförts med kvadratiske mindlinelement med sidmåten 2,0, 1,0, 0,5, 0,25 och 0,125 m.

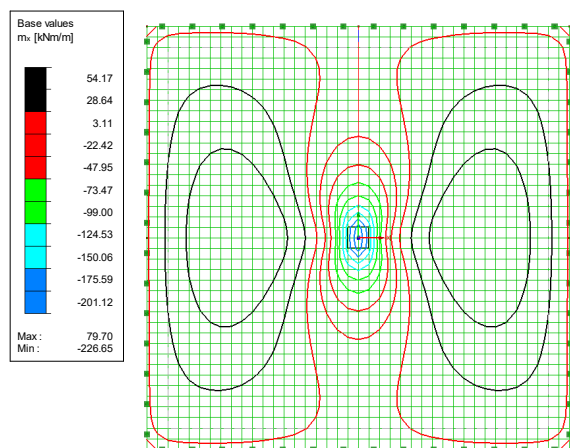


Figur 3.2.1.1 Studerad platta.

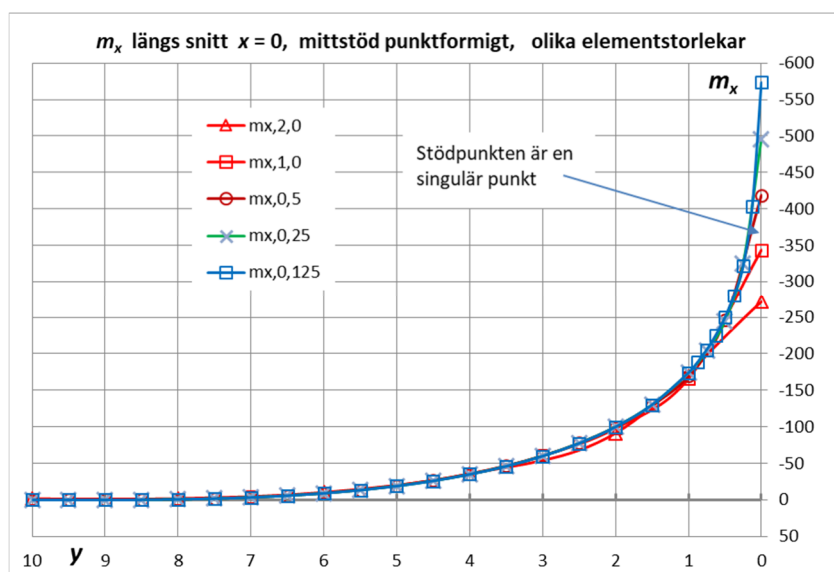


Figur 3.2.1.2 Huvudmoment, pelarstöd 1 x 1 m, mindlinelement 0,5 x 0,5 m, gles redovisning.

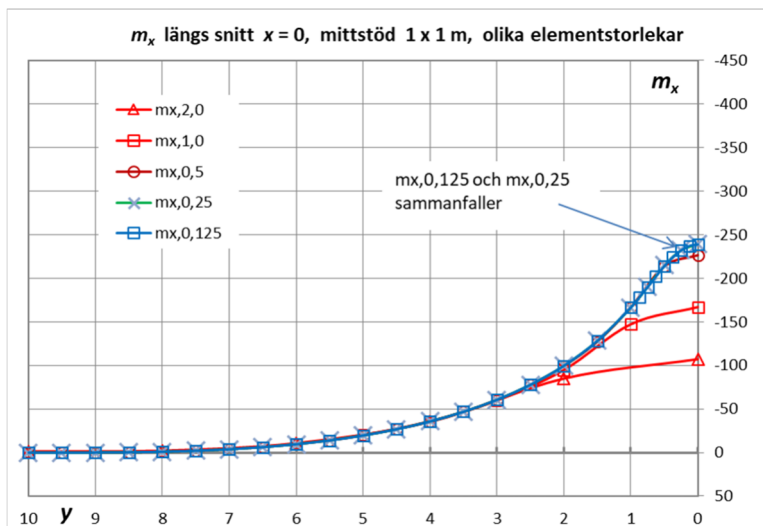
Anm. Huvudmomentplaner och huvudtvärkraftplaner av typen i Figur 3.2.1.2 har uppritats av författaren på excelark.



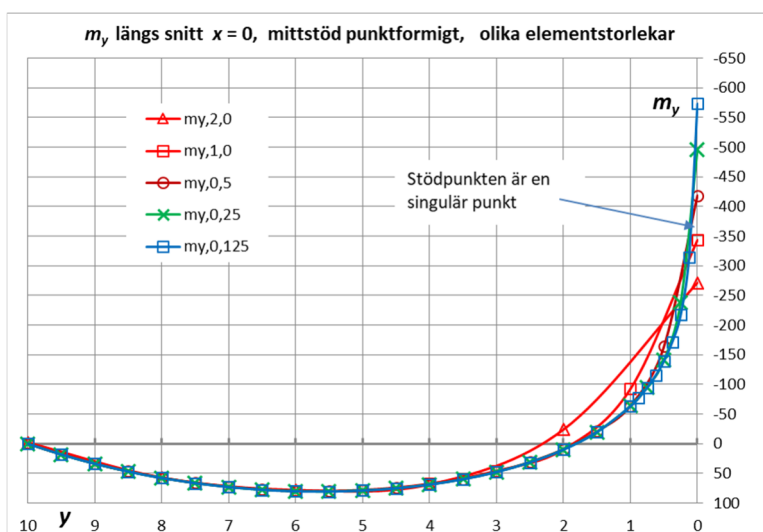
Figur 3.2.1.3 Böjmoment m_x , pelarstöd 1 x 1 m, element 0,5x0,5 m.



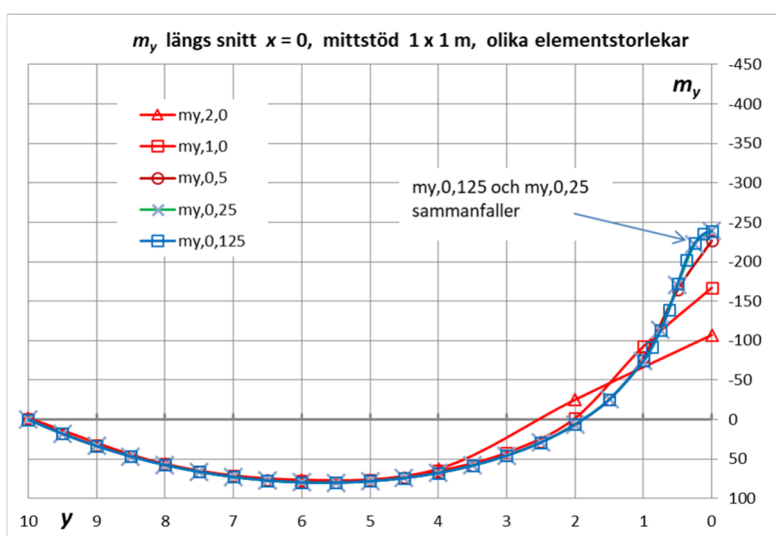
Figur 3.2.1.4 m_x vid punktupplag (tangentiellt moment), toppmomentet ökar utan begränsning vid allt finare elementindelning.



Figur 3.2.1.5 m_x vid stöd 1x1 m, toppmomentet stannar vid ett gränsvärde vid finare elementindelning.



Figur 3.2.1.6 m_y vid punktupplag (radiellt moment), toppmomentet ökar utan begränsning vid allt finare elementindelning.



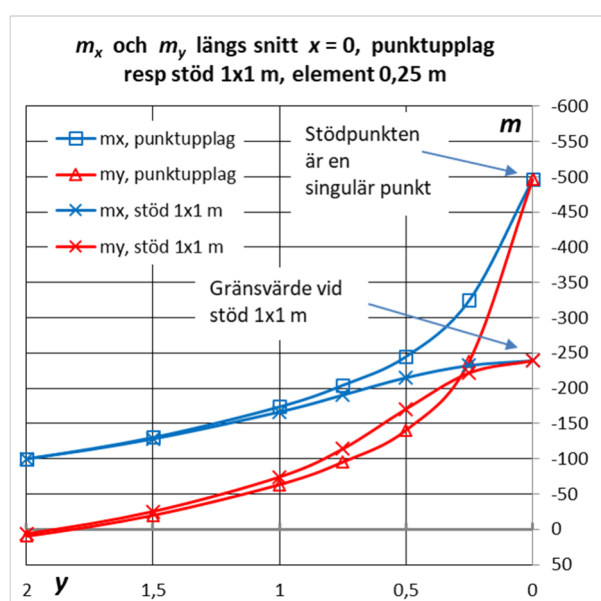
Figur 3.2.1.7 m_y vid stöd 1x1 m, toppmomentet stannar vid ett gränsvärde vid finare elementindelning.

Punktupplaget är en singular punkt där momentet ökar utan begränsning vid finare elementindelning.

Tabell 3.2.1.1

Toppmoment	Punktupplag i nod		Stöd 1,0 x 1,0 m	
element	m_x och m_y	differens	m_x och m_y	differens
2,0 x 2,0	-271,4		-107,2	
1,0 x 1,0	-343,4	-72,0	-167,0	-59,8
0,5 x 0,5	-418,7	-75,3	-226,7	-59,7
0,25 x 0,25	-496,0	-77,3	-239,1	-12,4
0,125 x 0,125	-573,4	-77,4	-239,0	0,1
	Singular punkt		Gränsvärde -239,0	

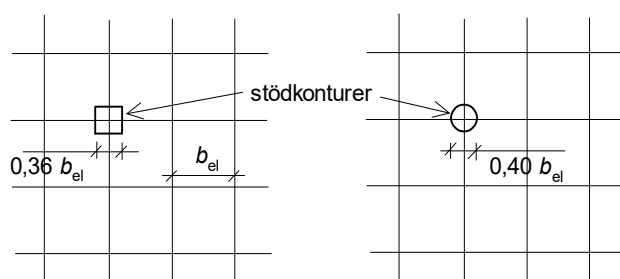
Kurvorna för element 0,25 x 0,25 m i de fyra diagrammen ovan är sammanförda i Figur 3.2.1.8.



Figur 3.2.1.8 Kurvor för element 0,25 x 0,25 m sammanförda.

Ur resultaten för pelare i form av *punktupplag* ger en interpolering att momentet -239,0 (gränsvärdet med stödmåttet 1,0 x 1,0 m) skulle erhållas med elementstorleken 2,8x2,8 m. (Interpoleringen har utförts med hjälp av en modell med $b_{el} = 3,33$ m, toppmoment -221,9.)

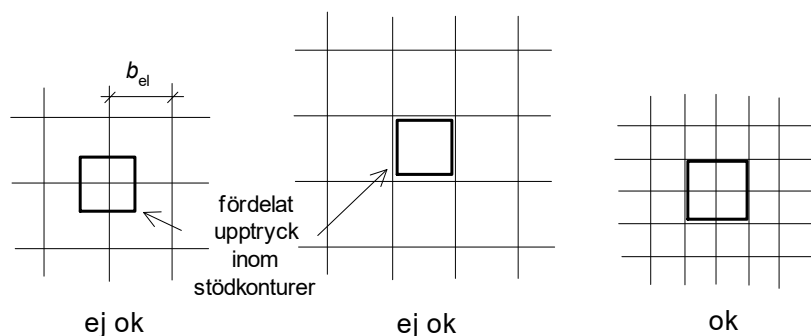
Av detta framgår att toppmomentet vid punktupplag motsvarar en kvadratisk *ekvivalent* stödyta med ett sidmått lika med $1,0/2,8 = 0,36$ x elementmåttet b_{el} . För en rund stödyta (med samma area som den kvadratiske) motsvarar detta en diameter lika med $1,128 \cdot 0,36 = 0,40 \cdot b_{el}$.



Figur 3.2.1.9 Ett punktupplag i beräkningsmodellen motsvarar ekvivalenta stödytor enligt figurerna.

Med *utbredd pelarstöd* 1,0x1,0 m uppnås gränsvärdet praktiskt taget med elementstorlek 0,5x0,5 m, d v s med fyra element inom pelarytan.

Vid elementstorlek 1,0x1,0 m och pelarytan något flyttad så att den sammanfaller med *ett* element erhöles toppmomentet -151,5 , d v s gränsvärdet närmades inte av att pelarreaktionen täckte helt element.



Figur 3.2.1.10 *Utbrett pelarstöd. Rättvisande gränsvärde erhålls med fyra element inom stödytan.*

Medelmomenten i en strimla i x - riktningen med bredden 2,0 m har beräknats. Momentet $m_{x,med}$ avser ett snitt från $x/y = 0/1$ till $0/-1$.

Tabell 3.2.1.2 *Medelmoment.*

	Punktupplag, $m_{x,med}$	kvot	Stöd 1x1 m, $m_{x,med}$	kvot
mindlin 1,0x1,0	-254,6		-157,2	
mindlin 0,5x0,5	-270,0	1,06	-205,4	1,31
mindlin 0,25x0,25	-277,3	1,03	-210,1	1,02
mindlin 0,125x0,125	-281,1	1,01	-210,1	1,00

Anm: Värdena avspeglar kurvor i Figur 3.2.1.4 och 3.2.1.5. Kvoten är relationen mellan två konsekutiva $m_{x,med}$ -värden.

Vid finare elementindelning växer toppmomentet vid punktupplag utan begränsning medan medelmomentet i x -strimlan går mot ett gränsvärde. Kvoten avtar mot 1,0.

Tillvägagångssätt vid *dimensionering* föreslås vara följande.

Vid *fördelad upplagsreaktion* inom $2 \times 2 = 4$ st element inom en ("ekvivalent") stödyta beräknas medelmomentet inom den medverkande bredden. När verklig ("effektiv") stödyta avviker från den ekvivalenta beräknas (det totala) justeringsmomentet ΔM enligt ekvation (3.2.2.1), vilket fördelas inom den medverkande bredden.

I modellen kan samtidigt kompletteras med ett nodupplag i stödcentrum. Den fördelade stödreaktionen skall ha en välanpassad intensitet så att nodreaktionen blir liten.

Vid *punktupplag* beräknas den ekvivalenta stödytan (enligt Figur 3.2.1.9) samt medelmomentet inom den medverkande bredden. När verklig (effektiv) stödyta avviker från den ekvivalenta beräknas också här justeringsmoment ΔM enligt ekvation (3.2.2.1), vilket fördelas inom den medverkande bredden. Justering av det lokala toppmomentet (Δm) enligt ekvation (3.2.3.1) kan visserligen utföras, men detta avspeglar inte förändringar i närliggande punkter.

Exempel vid punktupplag:

Med element 1,0 x 1,0 m erhöjls ovan medelmomentet inom 2,0 m bredd $m_{x,med} = -254,6$ kNm/m. Stödreaktionen är 1403 kN. Ekvivalent stödmått är $0,36 \cdot b_{el} = 0,36 \cdot 1,0 = 0,36$ m. Omräkna medelmomentet till stödmått $b_{el} = 1,0$ m.

Justeringen blir (ekvation (3.2.2.1)) $\Delta M = \frac{1403}{8} \cdot (1,0 - 0,36) = 112,2$ kNm.

Medelmomentet blir $m_{x,med} = -254,6 + \frac{112,2}{2,0} = -198,5$ kNm/m

vilket är ungefär detsamma som erhöjls med fördelad stödreaktion (-210,1 kNm/m, avvikelse 5,5%).

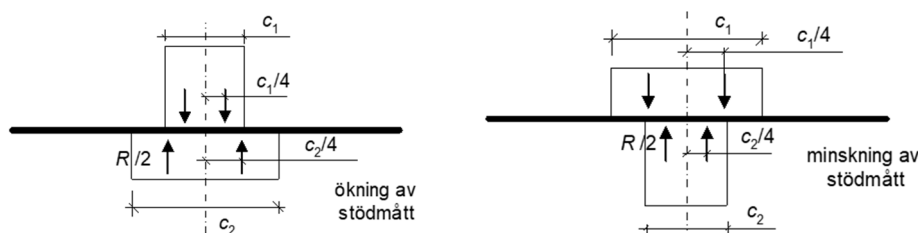
3.2.2 Justering ΔM (kNm) av moment inom medverkande bredd

För medverkande bredd, se Sektion 1.4.

Justering av momentet vid övergång från en mindre till en större kvadratisk stödyta, eller omvänt t ex vid ett lager, kan ske med ett momenttillskott ΔM (kNm), vilket fördelas över den medverkande bredden.

Halva stödreaktionen flyttas horisontellt måttet $c_2/4 - c_1/4$ och momenttillskottet i x - och y -riktningarna blir

$$\Delta M = \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{c_2}{4} - \frac{c_1}{4} \right) = \frac{R}{8} \cdot (c_2 - c_1) \quad (3.2.2.1)$$



Figur 3.2.2.1.

Vid rektangulär stödyta kan beräkning utföras separat i x - och y -riktning.

Vid en *rund stödyta* fördelas stödreaktionen som en linjelast på avståndet $d_1/3$ från centrum. I en sektor $d\varphi$ är stödreaktionen lika med $R/(2\pi) \cdot d\varphi$ och den horisontella förflyttningen (hävarmen) är $(d_2 - d_1)/3$. Momentkomponenten i x -riktningen erhöjls genom multiplikation med $\cos\varphi$.

$$\Delta M = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{R}{2\pi} \cdot d\varphi \cdot \frac{d_2 - d_1}{3} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \Delta M = \frac{R}{3\pi} \cdot (d_2 - d_1) \quad (3.2.2.2)$$

Momenttillskottet verkar i alla riktningar i horisontalplanet och motsvarande armering läggs in i två vinkelräta riktningar.

3.2.3 Justering Δm (kNm/m) av toppmoment

Justering av toppmomentet vid övergång från en mindre till en större stödyta, eller omvänt, kan ske med följande formel:

$$\Delta m = \pm \frac{R}{4\pi} \cdot (1 + \nu) \cdot \ln \frac{c_2}{c_1} \quad (3.2.3.1)$$

där R är pelarreaktionen, c_2 / c_1 är stödmåttjusteringen (sidmått eller diameter) och ν är tvärkontraktionstalet. (Sätt in c_2 / c_1 eller c_1 / c_2 men välj tecken på Δm så att momentjusteringen går åt rätt håll.)

Uttrycket gäller i normala fall då övriga stöd inte ligger nära den betraktade pelaren. Det har erhållits ur uttrycket för toppmoment i centrum av en cirkulär platta i Sektion B.3 genom superponering av två motriktade laster med olika radier.

Exempel: Ovan redovisades beräkning av en platta 20x20 m med ytlast $q = 10 \text{ kN/m}^2$ och pelarstöd i mitten. Med punktstöd (nodupplag) ökade toppmomenten med 75 å 77 kNm/m för varje halvering av elementstorleken. Därvid halveras varje gång den ekvivalenta stödbredden och med upplagsreaktionen $R = 1403 \text{ kN}$ ger formeln ovan

$$\Delta m = \frac{1403}{4\pi} \cdot (1 + 0) \cdot \ln \left(\frac{0,5}{1,0} \right) = \frac{1403}{4\pi} \cdot (-0,693) = -77,4 \text{ kNm/m}$$

vilket stämmer med plattberäkningarna.

Anm. Att justera totalmomentet inom den medverkande bredden med -77,4 multiplicerat med elementbredden ger ett sämre resultat än metod enligt Sektion 3.2.2 emedan detta inte avspeglar förändringar i närliggande punkter.

3.3 Linjeupplags ände

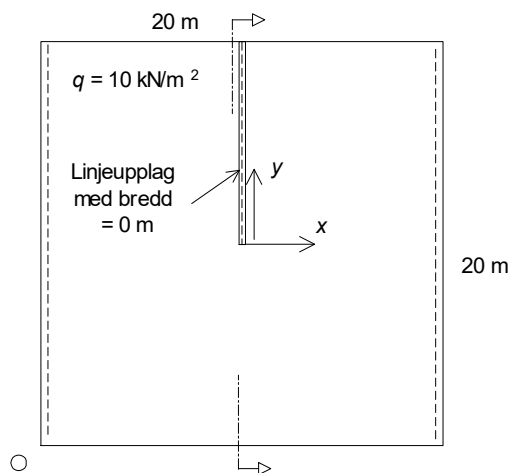
3.3.1 Fast upplag

Området kring ett linjeupplags ände studeras. Plattan enligt Figur 3.3.1.1 är i mittlinjen understödd av ett fast linjeupplag som ger en koncentrerad och hög upplagsreaktion i stödslut ($x/y = 0/0$). Detta är en singular punkt där plattans moment växer obegränsat vid finare elementindelning.

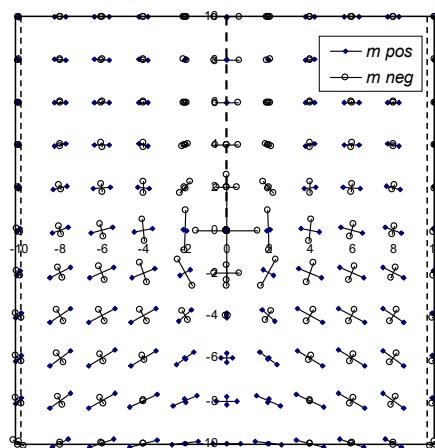
Plattmått 20x20 m, $h = 0,4 \text{ m}$, $\nu = 0$, $q = 10 \text{ kN/m}^2$. Beräkning har utförts med kvadratiska mindlinelement med sidmått 2,0, 1,0, 0,5, 0,25 och 0,125 m.

Böjmomentet m_x vid väggslut ökar enligt följande då elementstorleken stegvis halveras: -96,9, -185,1, -298,3, -450,1 och -614,2 kNm/m. Detta är en ökning med 88 till 164 kNm/m för varje halvering av elementstorleken.

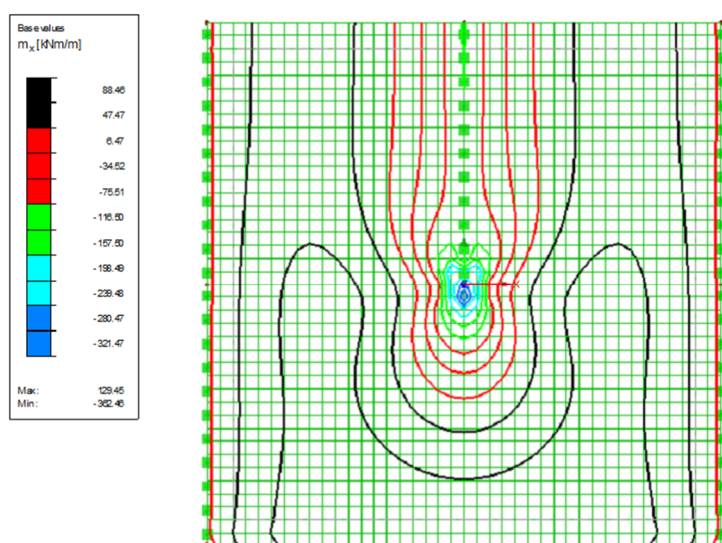
Böjmomentet m_y ökar enligt följande: -224,5, -346,6, -520,0, -688,3 och -815,4 kNm/m. Detta är en ökning med 122 till 174 kNm/m för varje halvering av elementstorleken.



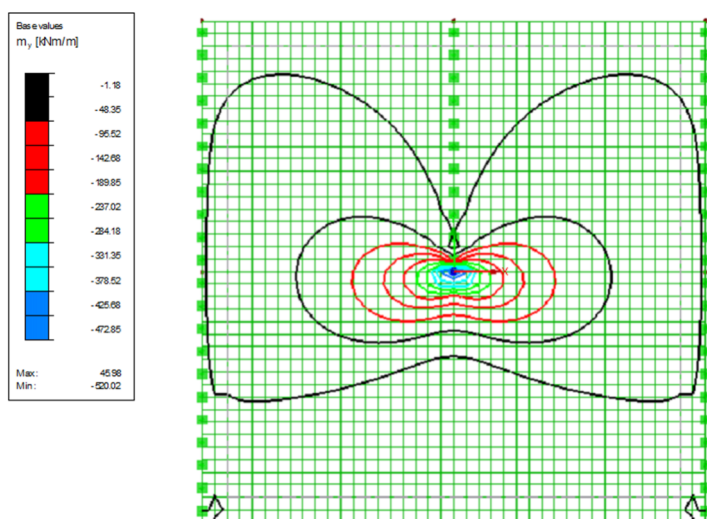
Figur 3.3.1.1 Studerad platta.



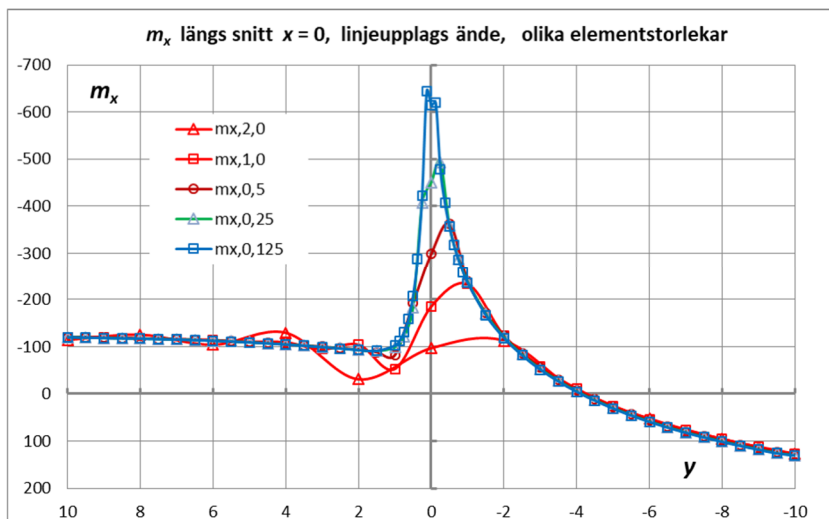
Figur 3.3.1.2 Huvudmoment, mindlinelement $0,5 \times 0,5 \text{ m}$, gles redovisning.



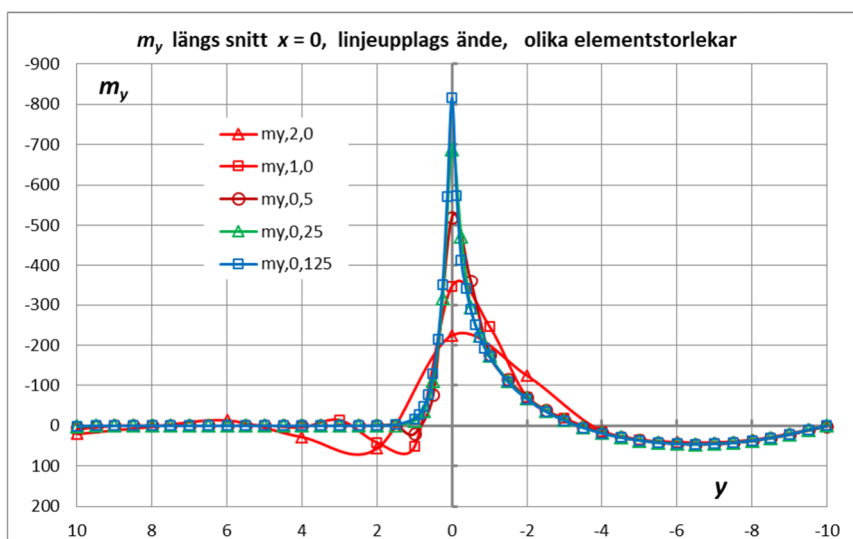
Figur 3.3.1.3 Böjmoment m_x , mindlinelement $0,5 \times 0,5 \text{ m}$.



Figur 3.3.1.4 Böjmoment m_y , mindlinelement $0,5 \times 0,5 \text{ m}$.



Figur 3.3.1.5 m_x längs snitt $x = 0$.



Figur 3.3.1.6 m_y längs snitt $x = 0$.

I tabeller nedan redovisas medelmoment i plattstrimlor i x - och y -riktningen med bredden 2,0 m. Momentet $m_{x,med}$ avser ett snitt från $x/y = 0/1$ till $0/-1$ och $m_{y,med}$ ett snitt från $-1/0$ till $1/0$.

Tabell 3.3.1.1 Medelmoment i x -riktning.

	$m_{x,med}$ inom 2,0 m	kvot
mindlin 1,0x1,0	-164,0	
mindlin 0,5x0,5	-253,4	1,55
mindlin 0,25x0,25	-308,8	1,22
mindlin 0,125x0,125	-341,7	1,11

Anm: Värdena avspeglar kurvor i Figur 3.3.1.5 över m_x ovan. Kvoten är relationen mellan två konsekutiva m_x -värden.

Tabell 3.3.1.2 Medelmoment i y-riktning.

	$m_{y,med}$ inom 2,0 m	kvot
mindlin 1,0x1,0	-319,7	
mindlin 0,5x0,5	-418,4	1,31
mindlin 0,25x0,25	-466,6	1,12
mindlin 0,125x0,125	-488,3	1,05

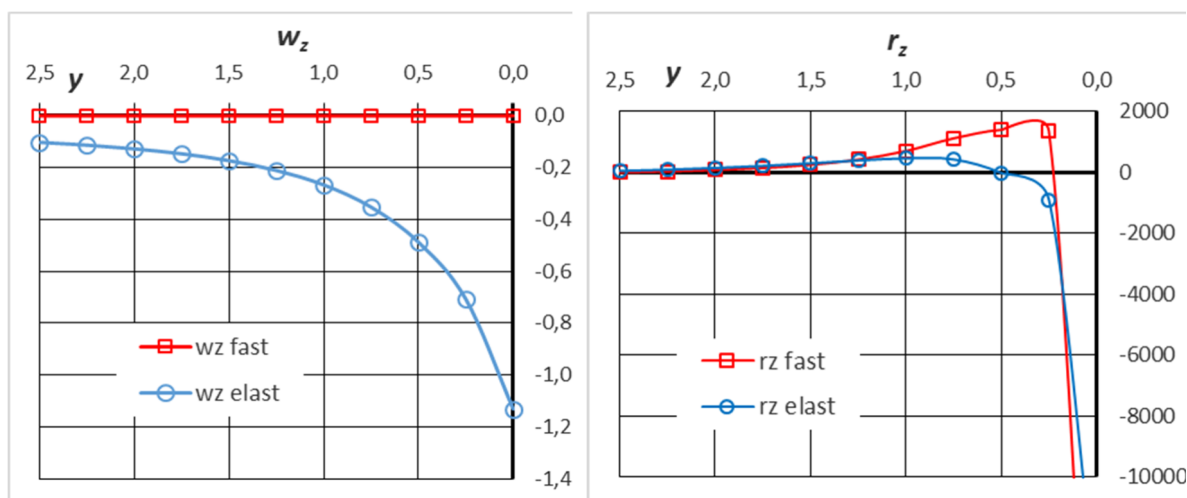
Anm: Värdena avser inte samma snittriiktning som Figur 3.3.1.6 över m_y ovan.

Vid finare elementindelning växer toppmomenten utan begränsning medan medelmomenten i strimlorna går mot ett gränsvärde. Kvoten avtar mot 1,0.

Kurvsvängarna nedåt i diagrammen till vänster om upplagsänden ($y > 0$) undviks när elementstorleken väljs ungefär lika med plattjockleken eller mindre, d v s $b_{el} \leq 0,5$ m i detta fall. En kontrollberäkning med plattjockleken ökad från 0,4 m till 0,8 m visade att kurvsvängarna var obetydliga vid elementstorleken $b_{el} = 1,0$ m och obefintliga vid mindre element.

3.3.2 Elastiskt upplag

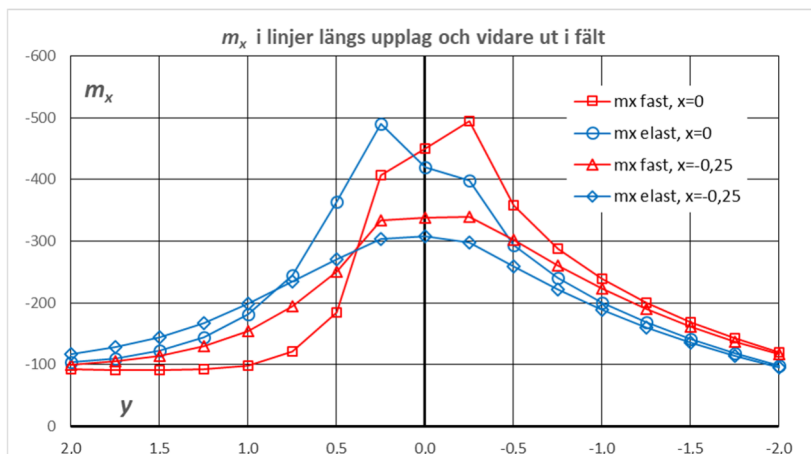
I plattmodellen infördes längs (halva) mittlinjen en stödjande vägg med höjd 5,0 m och en styvhet motsvarande tjockleken 0,3 m. Mindlinelement 0,25 m och $h = 0,4$ m. I Figur 3.3.2.1 visas nedböjning och upplagsreaktion (vertikalkraft i väggen på nivå $z = 0$) jämfört med fast stöd.



Figur 3.3.2.1 Jämförelse av nedböjning (mm) och upplagsreaktion (kN/m) längs upplag.

För att visa momentförändringen p g a det elastiska upplaget studeras m_x längs upplagslinjen och vidare ut i fält samt m_y i snitt tvärs upplagslinjen.

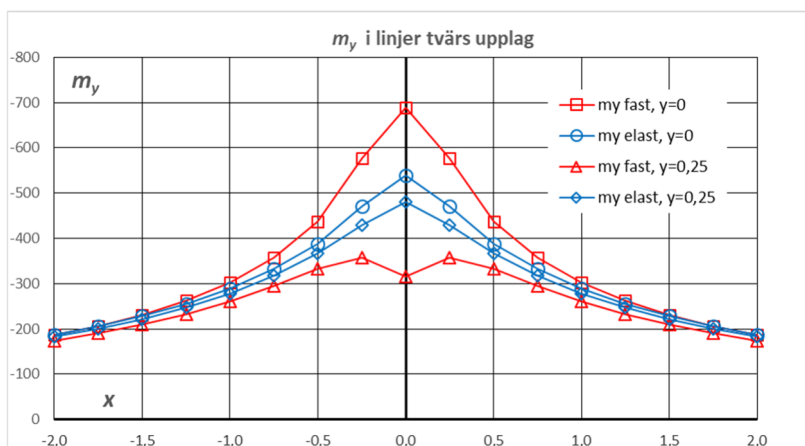
Vid fast uppläggning orsakar upplagsreaktionen i form av vertikalt drag vid sidan om stödänden att m_x blir litet för $y \geq 0,5$ m. Observera i Figur 3.3.2.2 att i linjen $x = -0,25$ m är m_x betydligt större.



Figur 3.3.2.2 Jämförelse av m_x längs upplag och vidare ut i fält, $x = 0$, samt längs närliggande linjer $x = \pm 0,25$, elastisk resp fast uppläggning.

När elastiskt stöd införs uppkommer endast små vertikala dragkrafter i upplaget. m_x -kurvan förskjuts in mot stöddlinjen, åt vänster i Figur 3.3.2.2, vilket synes riktigt för verkliga förhållanden. Det totala böjmomentet i x -led inom diagramområdet blir praktiskt taget oförändrat.

Minskning av väggstyvhets från motsvarande 0,3 m till 0,1 m resulterade för m_x i att toppen var nästan oförändrad, momenten i stöddlinjen ökade och i fält minskade markant. Vid en ökning till 0,5 m var toppen också nästan oförändrad medan momenten i stöddlinjen minskade något och i fält ökade något.



Figur 3.3.2.3 Jämförelse av m_y i linjer tvärs upplag, $y = 0$ och 0,25, elastisk resp fast uppläggning.

Figur 3.3.2.3 visar att toppmomentet i y -led reduceras betydligt och utjämnas när elastiskt upplag införs.

Resultat vid införande av elastiskt stöd:

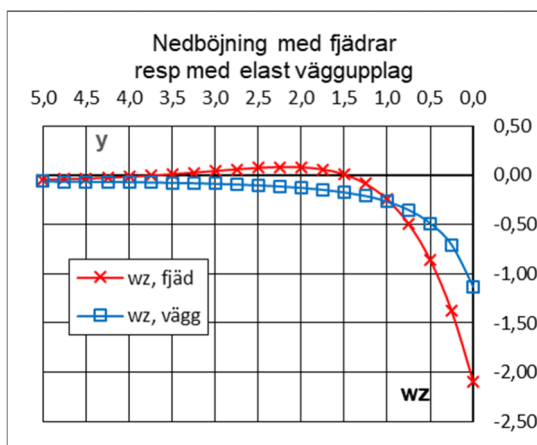
Momentomfördelningen är markant. Momenttoppen dämpas i y -led men inte i x -led.

Vid dimensionering bör elastiskt stöd införas.

I Sektion 4.4 visas inverkan av olika höjd hos den stödjande elastiska väggen. Där har plattjocklek $h = 0,6$ m tillämpats. Böjmomentets fördelning i plattan är praktiskt taget lika för vägghöjderna 5,0, 2,0 och 1,0 m. Väggarnas översta parti skapar ensamt lastfördelningen, varför endast övre delen av stödjande vägg behöver medtas (i detta symmetriska fall när väggen inte momentbelastas).

3.3.3 Elastiska fjädrar längs upplag

Att införa fjädrar i upplagslinjen istället för vägg är inte rättvisande eftersom de inte samverkar på det sätt som elementen i väggen gör. D v s man får fel styvhet i väggen om denna betraktas som flera parallellt stående pelare. Med fjädermodul $1\,800\,000\text{ kN/m}^2$ erhöles nedböjningar i stömlinjen enligt Figur 3.3.3.1.

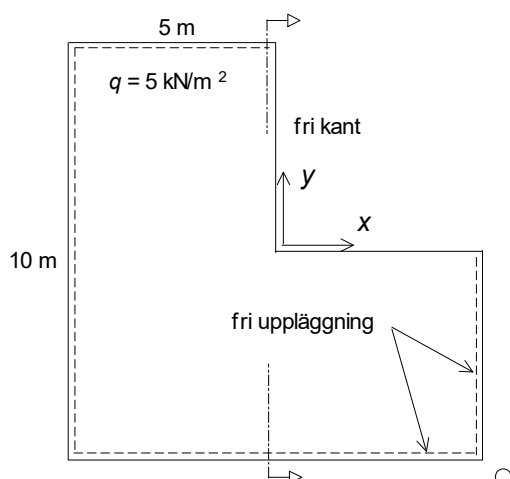


Figur 3.3.3.1 Nedböjning (mm) längs väggupplag.

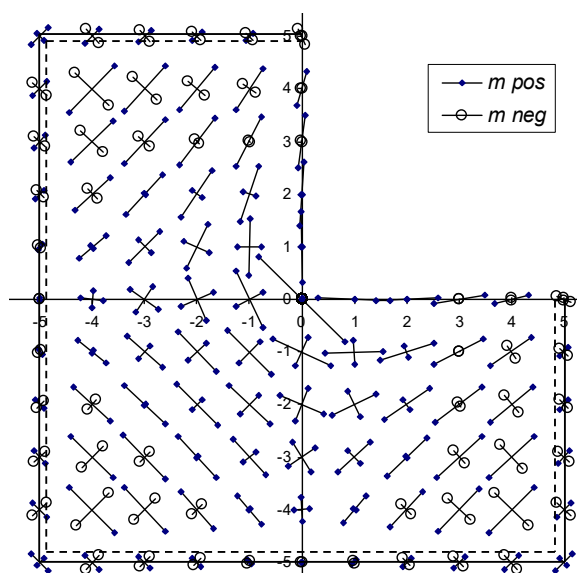
3.4 Inåtgående fritt hörn

En elastisk platta $10 \times 10\text{ m}$ enligt Fig 3.4.1 med fritt upplagda kanter samt med ett inåtgående hörn med fria (ej understödda) kanter har beräknats med kvadratiska mindlinelement med olika storlekar: $1,0$, $0,5$, $0,25$, $0,125$ och $0,0625\text{ m}$; $h = 0,4\text{ m}$, $\nu = 0$, $q = 5\text{ kN/m}^2$. (Studien kan anses gälla även för hörn i platthål.)

Största huvudmomentet m_1 i 45° -riktningen i det inåtgående hörnet ökar enligt följande då elementstorleken stegvis halveras: $31,6$, $38,3$, $45,9$, $55,4$ och $69,5\text{ kNm/m}$. Böjmomentet m_x i samma punkt ökar enligt följande: $18,4$, $20,5$, $23,6$, $28,3$ och $35,6\text{ kNm/m}$. Här är hörnpunkten en singular punkt.



Figur 3.4.1 Studerad platta.

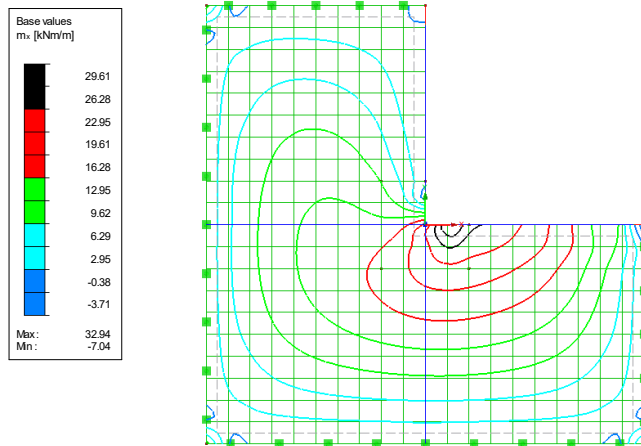


Figur 3.4.2 Huvudmoment, mindlinelement $0,25 \times 0,25\text{ m}$, gles redovisning.

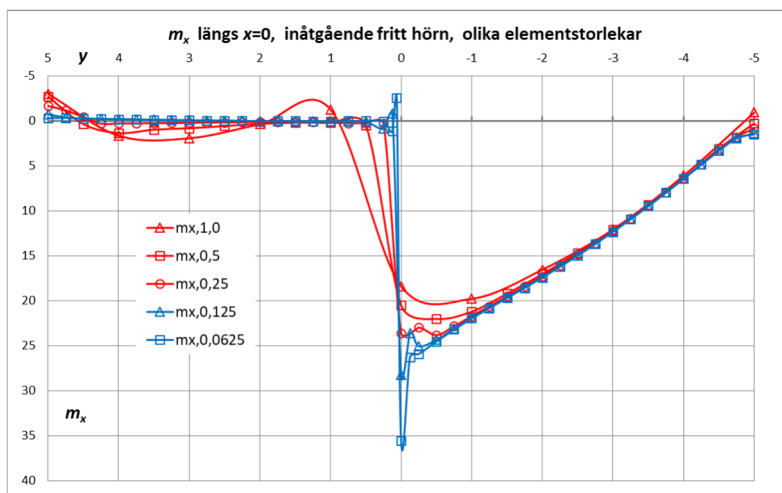
Huvudmomentplanen visar tydligt att armeringen blir mest effektiv om den inläggs i riktning $\pm 45^\circ$.

När armeringen istället placeras i x - och y -riktningarna bör för begränsning av sprickbredden närmast det inåtgående hörnet ändå ett band av 45° -armering inläggas på exvis 1 m bredd.

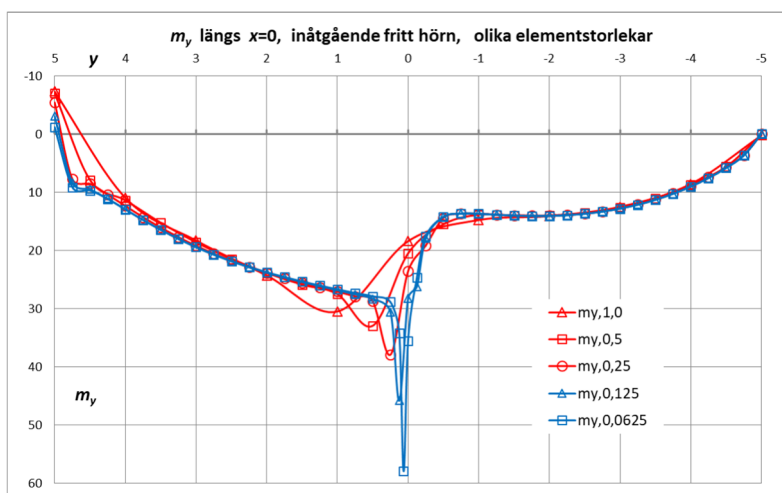
Dimensionering för böj- och vridmoment, se Sektion 3.1 och Bilaga A.



Figur 3.4.3 Böjmoment m_x , mindlinelement $0,5 \times 0,5$ m.



Figur 3.4.4 m_x längs snitt $x = 0$.

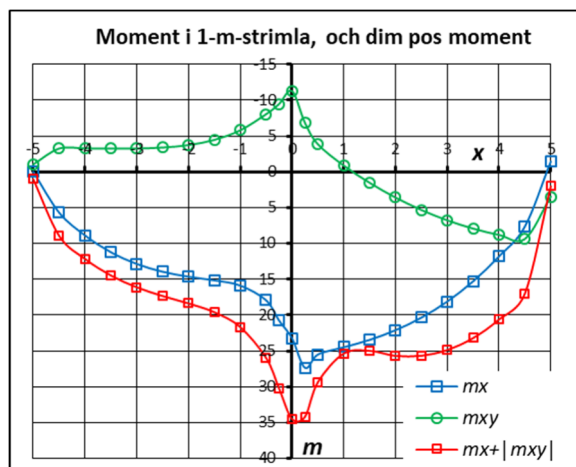
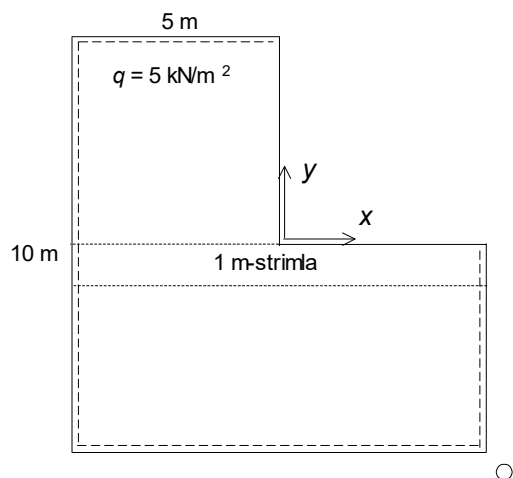


Figur 3.4.5 m_y längs snitt $x = 0$.

Högre sidotopp för m_x visas i Figur 3.4.3 och för m_y i Figur 3.4.5. I själva hörnet är dimensioneringsmomentet $m_x + |m_{xy}|$ av samma storleksordning som i sidotopparna.

m_y -diagrammet längs $x = 0$ kan p g a symmetri kring diagonalen också utläsas som ett m_x -diagram längs $y = 0$ från $x = 5$ till $x = -5$.

Här finns ingen stödyta eller stödelasticitet som beräkningsmässigt kan reducera momenten. Topparna blir vid finare elementindelning högre men får minskande bredd.



Figur 3.4.6 1 m-strimla.

Figur 3.4.7 Medelmoment i en 1 m-strimla, mindlinelement 0,25x0,25 m.

För en 1-m-strimla i x -riktningen visas medelmoment i Figur 3.4.7.

I tabeller nedan redovisas m_x i plattstrimlor i x -riktningen med bredden 1,0 m.

Tabell 3.4.1 Medelmoment, snitt från $x/y = 0/0$ till $0/-1$.

	m_x inom 1,0 m
mindlin 0,5x0,5	21,4
mindlin 0,25x0,25	23,1
mindlin 0,125x0,125	24,0

Snitt genom den högre sidotoppen:

Tabell 3.4.2 Medelmoment, snitt från $x/y = b_{el}/0$ till $b_{el}/-1$.

	m_x inom 1,0 m
mindlin 0,5x0,5	27,0
mindlin 0,25x0,25	27,4
mindlin 0,125x0,125	27,3

Medelmomenten är ungefär lika vid de olika elementstorlekarna.

En strimla i y -riktningen får i detta fall samma resultat p g a symmetri kring diagonalen $x = y$.

3.5 Inåtgående upplagt hörn

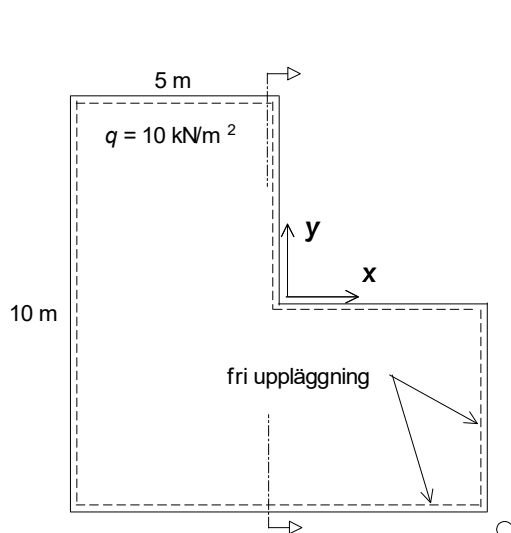
3.5.1 Fast upplag

En platta 10x10 m enligt Figur 3.5.1.1 har beräknats med kvadratiska mindlinelement med olika storlekar. I det inre hörnet ansluter två fritt upplagda kanter (fasta linjeupplag).

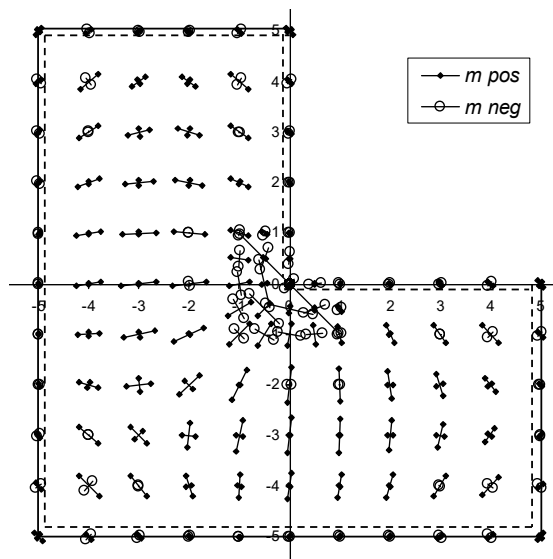
I det inre hörnet i $x/y = 0/0$ erhålls en hög upplagsreaktion. Detta är en singular punkt där plattans moment blir större vid finare elementindelning.

I hörnet råder praktiskt taget fast inspänning p g a upplagsvinkelns stora styvhet.

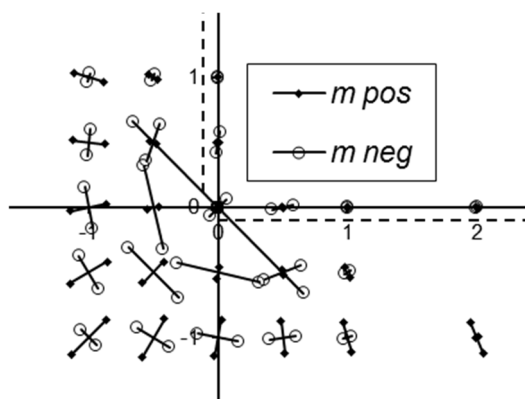
Jämförande studier har utförts med mindlinelement 1,0, 0,5, 0,25, 0,125 och 0,0625 m och $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 10$ kN/m² samt för element 0,25 även med $h = 0,2$ m.



Figur 3.5.1.1 Studerad platta.



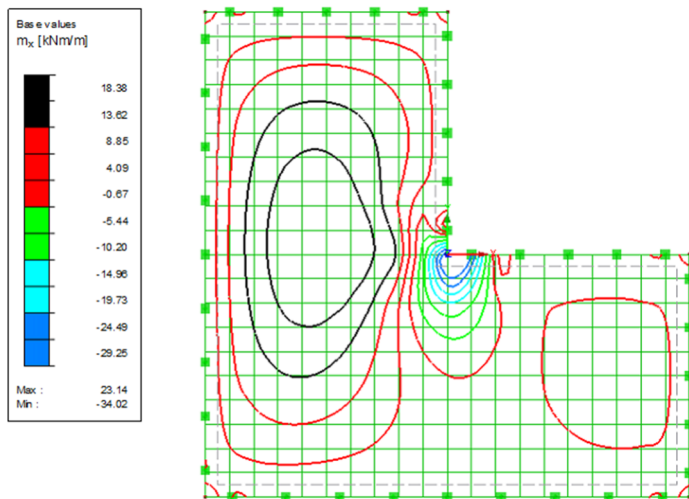
Figur 3.5.1.2 Huvudmoment, mindlinelement 0,25 x 0,25 m, gles redovisning.



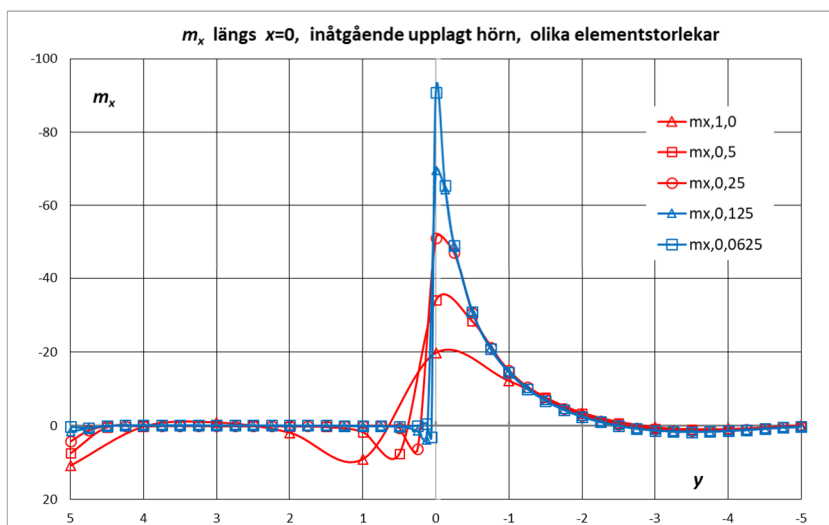
Figur 3.5.1.3 Huvudmoment intill hörn, förstoring av Figur 3.5.1.2.

Största huvudmomentet m_{II} i 45°-riktningen i det inåtgående hörnet ökar enligt följande då elementstorleken stegvis halveras: -35,7, -61,5, -93,3, -130,2 och -174,6 kNm/m. Böjmomentet m_x ökar enligt följande: -19,8, -34,0, -51,1, -69,5 och -90,9 kNm/m.

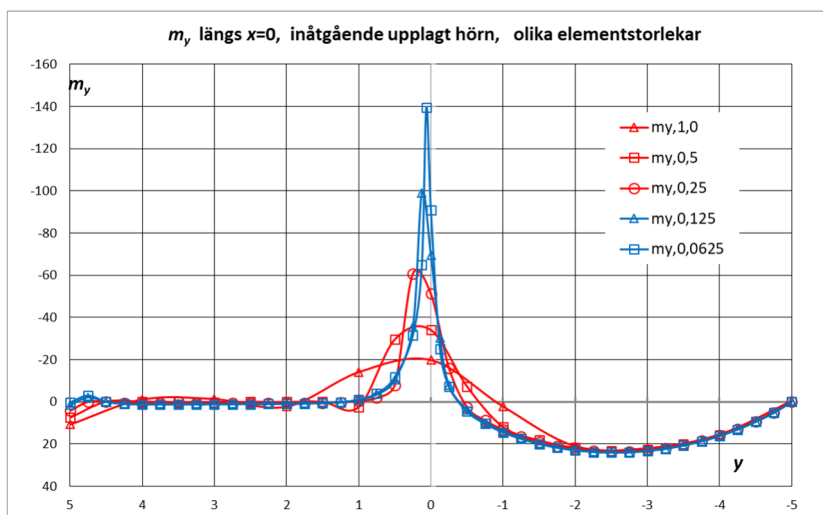
I hörnet ger m_x tillsammans med ett lika stort m_y samt ett vridmoment m_{xy} av numeriskt samma storleksordning ett stort huvudmoment i ena riktningen och ett mycket litet i den andra riktningen, se Figur 3.5.1.3. Detta utjämnas vid elastiskt upplag, se Sektion 3.5.2, Figur 3.5.2.2.



Figur 3.5.1.4 Böjmoment m_x , mindlinelement 0,5x0,5 m.



Figur 3.5.1.5 m_x längs snitt $x = 0$.



Figur 3.5.1.6 m_y längs snitt $x = 0$.

Hög sidotopp för m_y (med element 0,25 – 0,0625) visas i momentdiagrammet ovan. I själva hörnet är dimensioneringsmomentet $m_y - |m_{xy}|$ högre än i sidotopparna.

m_y -diagrammet längs $x = 0$ kan p g a symmetri kring diagonalen också utläsas som ett m_x -diagram längs $y = 0$ från $x = 5$ till $x = -5$.

För studium av medelmoment kan här en strimlebredd om 1,0 m anses vara lämplig m h t plattans storlek. I tabeller nedan redovisas medelmoment i plattstrimlor i x - riktningen.

Tabell 3.5.1.1 Medelmoment i snitt från $x/y = 0/0$ till $0/-1$.

	m_x inom 1,0 m	kvot
mindlin 0,5x0,5	-26,3	
mindlin 0,25x0,25	-33,0	1,25
mindlin 0,125x0,125	-36,1	1,09

Anm: Värdena avspeglar kurvor i Figur 3.5.1.5 ovan. Kvoten är relationen mellan två konsekutiva m_x -värden.

Vid finare elementindelning växer toppmomentet utan begränsning medan medelmomentet i strimlan går mot ett gränsvärde. Kvoten avtar mot 1,0.

Tabell 3.5.1.2 Medelmoment i snitt från $x/y = b_{el}/0$ till $b_{el}/-1$.

	m_x inom 1,0 m
mindlin 0,5x0,5	-19,4
mindlin 0,25x0,25	-30,0
mindlin 0,125x0,125	-37,4

Anm: Snittet är taget genom de högre sidotopparna för element 0,25 och 0,125.

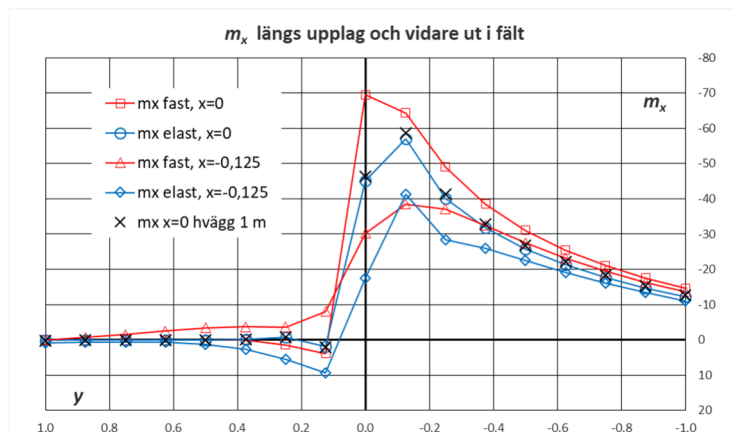
En beräkning med mindlinelement 0,25x0,25 m och med $h = 0,2$ m gav bara smärre förändringar av momenten vid det inre hörnet. Toppvärdet ökade något och medelmomenten i strimlorna blev -37,8 och -27,1 kNm/m istället för -33,0 resp -30,0 i tabellerna ovan. En halvering av plattjockleken innebär att skjuvstyvheten halveras medan böjstyvheten minskar till en åttondel. Den relativa skjuvstyvheten ökar alltså med en faktor fyra och man närmar sig en kirchoffmodell.

3.5.2 Elastiskt upplag

I plattmodellen med mindlinelement 0,125 m och $h = 0,4$ m infördes två (tunna) väggar med höjd 3,0 m och en styvhet motsvarande tjockleken 0,3 m. Gångjärnsleder infördes upptill i anslutningen till plattan.

I Figur 3.5.2.1 visas m_x längs upplagslinjen och vidare ut i fält samt längs en närliggande sektion. Böjmomenten reduceras när elastiska upplag införs. Den största förändringen sker i vridmomentet m_{xy} , se närmare studium nedan.

(En reduktion av vägghöjderna från 3,0 m till 1,0 m gav de i Figur 3.5.2.1 kryssmarkerade värdena för m_x . De överensstämmer i stort sett med värdena för vägghöjd 3,0 m. Detta visar att väggarnas översta parti ensamt skapar momentreduktionen.)



Figur 3.5.2.1 Jämförelse av m_x längs upplag (vänstra delen) och vidare ut i fält, $x = 0$, samt längs näraliggande snitt $x = -0,125$. Elastiska resp fasta linjeupplag.

Singulariteten i hörnet ger följande lägre värden vid elastiskt upplag:

element 0,5 $m_x = -24,7$ kNm/m

element 0,25 $m_x = -34,4$ ”

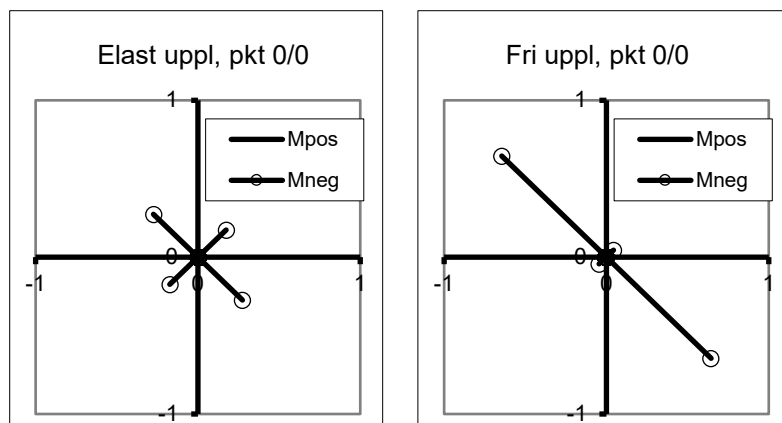
element 0,125 $m_x = -45,1$ ”

Vi studerar hörnet (0/0) samt en punkt strax innanför detsamma (-0,125/-0,125).

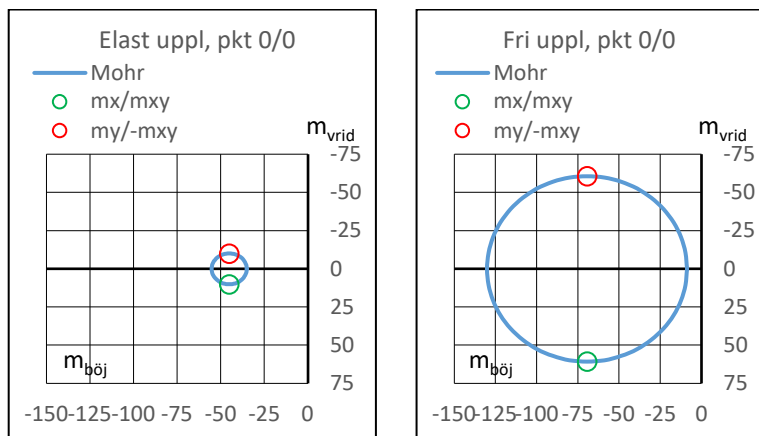
Tabell 3.5.2.1 Snittkrafter i hörnet (0/0).

	m_x	m_y	m_{xy}	m_I	m_{II}	α_b
Fast upplag ("fri uppl")	-69,5	-69,5	60,7	-8,8	-130,2	45°
Elastiskt upplag	-45,1	-45,1	10,1	-35,1	-55,2	45°

α_b är vinkeln motsols från x -axeln till störst positiva huvudmoment (medräknat tecken).



Figur 3.5.2.2 Huvudmoment i inre hörn, samma skala, element 0,125 (x -axel åt höger, "Fri uppl" = fast linjeupplag).

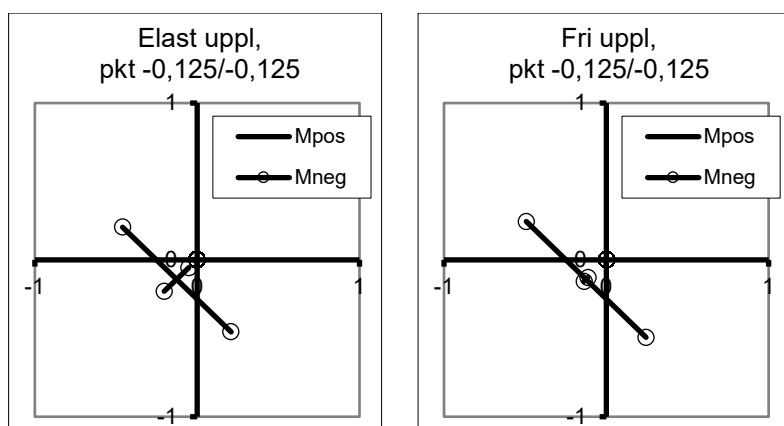


Figur 3.5.2.3 Momenttillstånd visat med Mohrs cirkel.

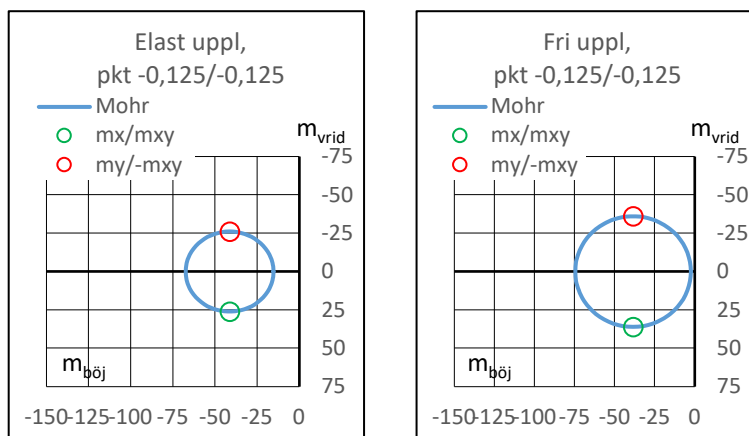
Vid *fast upplag* har vi ett stort vridmoment i hörnet sammanhörande med ett stort huvudmoment i 45°-riktningen. Vid *elastiskt upplag* blir momenten reducerade och huvudmomenten kraftigt utjämnade genom att vridmomentet reducerats med 83%.

Tabell 3.5.2.2 Snittkrafter i punkt strax innanför hörnet (-0,125/-0,125).

	m_x	m_y	m_{xy}	m_I	m_{II}	α_b
Fast stöd ("fri uppl")	-38,5	-38,5	36,1	-2,4	-74,6	45°
Elastiskt stöd	-41,4	-41,4	26,1	-15,3	-67,4	45°



Figur 3.5.2.4 Huvudmoment i punkt -0,125/-0,125, samma skala.



Figur 3.5.2.5 Momenttillstånd visat med Mohrs cirkel.

Resultat:

Fast upplag: Toppmomentet i hörnet blir mycket stort vid fin elementindelning. För medelmomentet på 1,0 m bredd dämpas effekten av singulariteten betydligt.

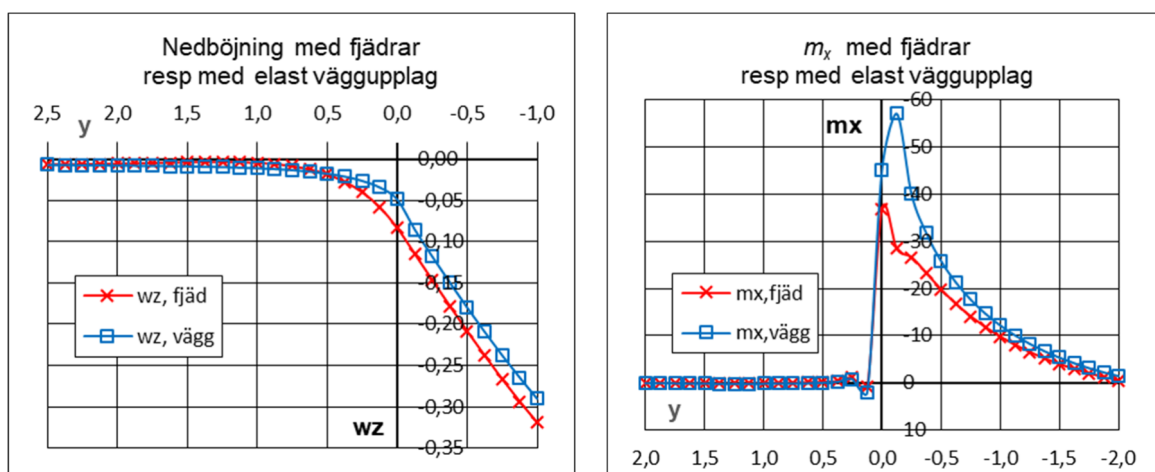
Beräkningsresultatet för den singulära punkten i hörnet får uppfattas som *en indikation* på höga momenttoppar.

Elastiskt upplag bör införas. Detta utgör en anpassning till verkliga förhållanden. Dimensionerande moment i x -riktning $m_x + |m_{xy}|$ och i y -riktning reduceras till knappt hälften.

Endast övre delen av stödjande vägg behöver medtas i modellen i detta fall.

3.5.3 Elastiska fjädrar längs upplag

Att införa *fjädrar* längs upplagslinjerna istället för väggar är inte rättvisande eftersom de inte samverkar på det sätt som elementen i väggen gör. D v s man får fel styvhet i väggen om denna betraktas som flera parallellt stående pelare. Mindlinelement 0,125 m och $h = 0,4$ m. Med fjädermodul 3 000 000 kN/m²) erhöles nedböjningar och böjmoment m_x i stödlinjen och ut i fält enligt Figur 3.5.3.1.



Figur 3.5.3.1a och b Nedböjning (mm) och böjmoment (kNm/m) längs upplag och ut i fält.

3.6 Inåtgående inspänt hörn

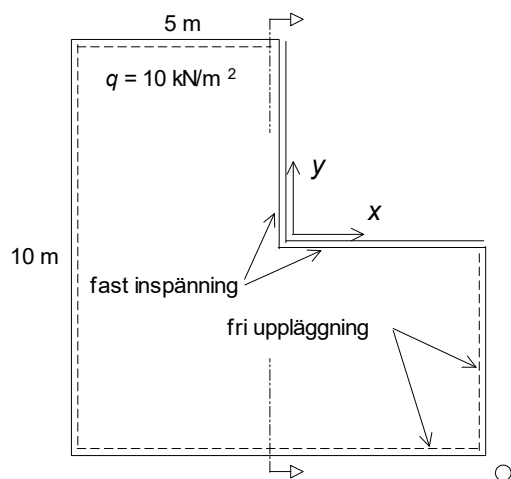
3.6.1 Inspänt upplag

En platta 10x10 m enligt Figur 3.6.1.1 har beräknats med kvadratiska mindlinelement med olika storlekar. I det inre hörnet ansluter två inspända (och upplagda) kanter.

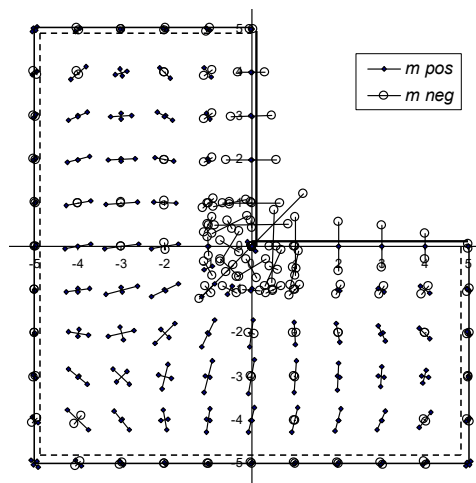
I det inre hörnet i $x/y = 0/0$ erhålls en hög upplagsreaktion. Detta är en singulär punkt där plattans moment växer obegränsat vid finare elementindelning.

Jämförande studier har utförts med mindlinelement 1,0, 0,5, 0,25, 0,125 och 0,0625 m och $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 10$ kN/m².

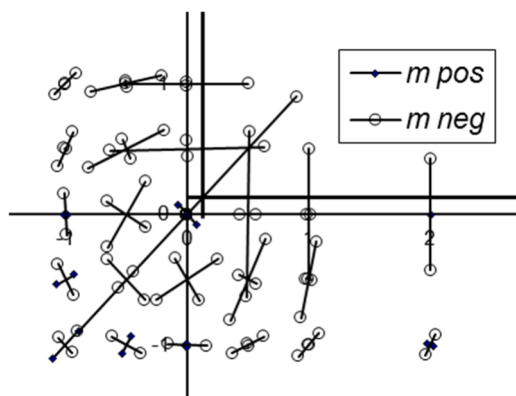
Största *huvudmomentet* m_{II} i 45°-riktningen i det inåtgående hörnet ökar enligt följande då elementstorleken stegvis halveras: -44,1, -62,1, -84,8, -114,4 och -155,3 kNm/m. Böjmomentet m_x har höga sidotoppar som ökar enligt följande: -33,0, -45,5, -64,9, -88,8 och -117,5 kNm/m.



Figur 3.6.1.1 Studerad platta.

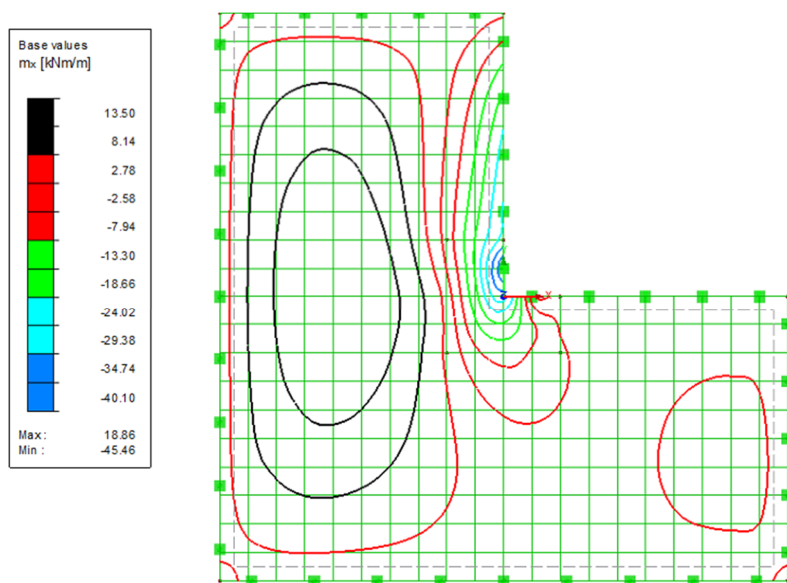


Figur 3.6.1.2 Huvudmoment, mindlinelement 0,25 x 0,25 m, gles redovisning.

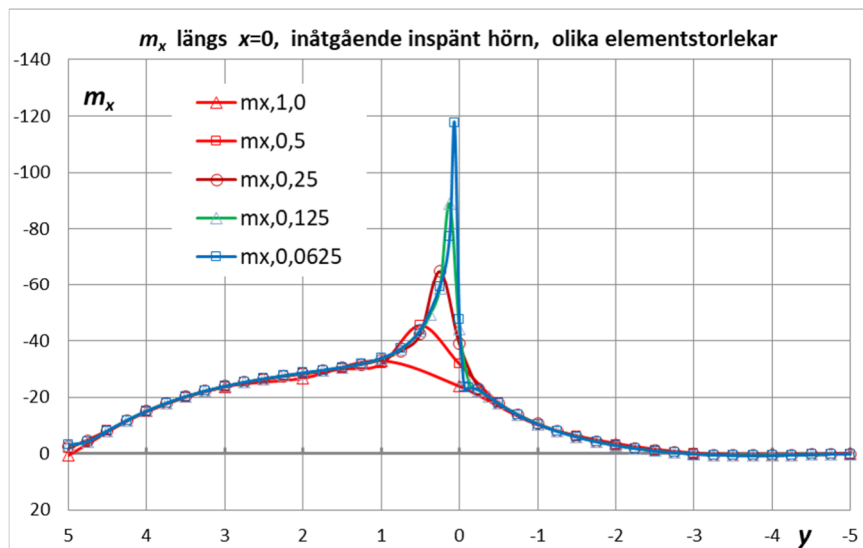


Figur 3.6.1.3 Huvudmoment intill hörn, förstoring från Figur 3.6.1.2.

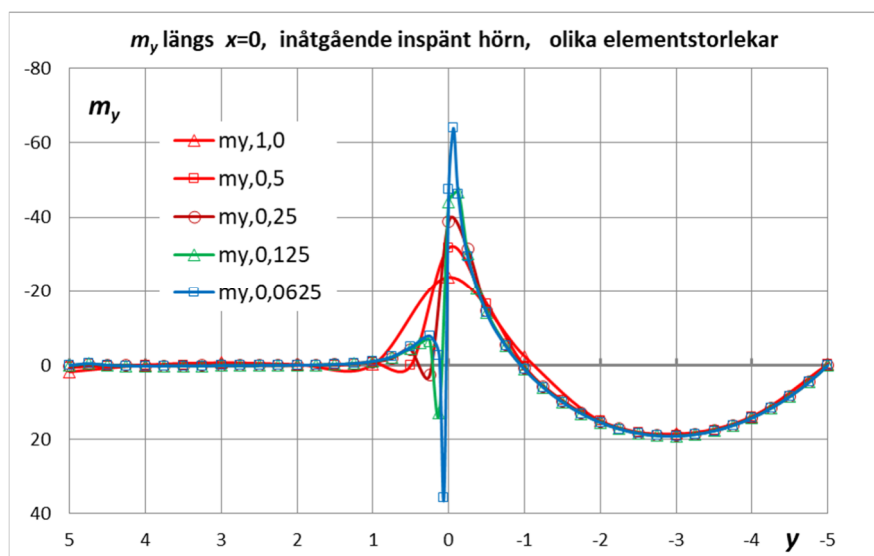
I hörnet ger m_x tillsammans med ett lika stort m_y samt ett (numeriskt) betydligt större vridmoment m_{xy} ett stort negativt huvudmoment i ena riktningen och ett litet positivt (!) i den andra riktningen, se Figur 3.6.1.3. Detta utjämnas vid elastiskt upplag, se Sektion 3.6.2, Figur 3.6.2.2.



Figur 3.6.1.4 Böjmoment m_x , mindlinelement 0,5x0,5 m.



Figur 3.6.1.5 m_x längs snitt $x = 0$.



Figur 3.6.1.6 m_y längs snitt $x = 0$.

Höga sidotoppar för m_x och m_y visas i momentdiagrammen ovan. I själva hörnet är dimensioneringsmomentet $m_x - |m_{xy}|$ högre än i sidotopparna.

m_y -diagrammet längs $x = 0$ kan på grund av symmetri kring diagonalen också utläsas som ett m_x -diagram längs $y=0$ från $x=5$ till $x=-5$.

För studium av medelmoment kan här en strimlebredd om 1,0 m anses vara lämplig mot plattans storlek. I tabeller nedan redovisas medelmoment i plattstrimlor i x -riktningen.

Tabell 3.6.1.1 Medelmoment i snitt från $x/y = 0/0,5$ till $0/-0,5$.

	m_x inom 1,0 m	kvot
mindlin 0,5x0,5	-31,8	
mindlin 0,25x0,25	-39,2	1,23
mindlin 0,125x0,125	-42,4	1,08

Anm: Värdena avspeglar kurvor i Figur 3.6.1.5 ovan. Kvoten är relationen mellan två konsekutiva m_x -värden.

Vid finare elementindelning växer toppmomentet utan begränsning medan medelmomentet i strimlan går mot ett gränsvärde. Kvoten avtar mot 1,0.

Tabell 3.6.1.2 Medelmoment i snitt från $x/y = -b_{el}/0,5$ till $-b_{el}/-0,5$.

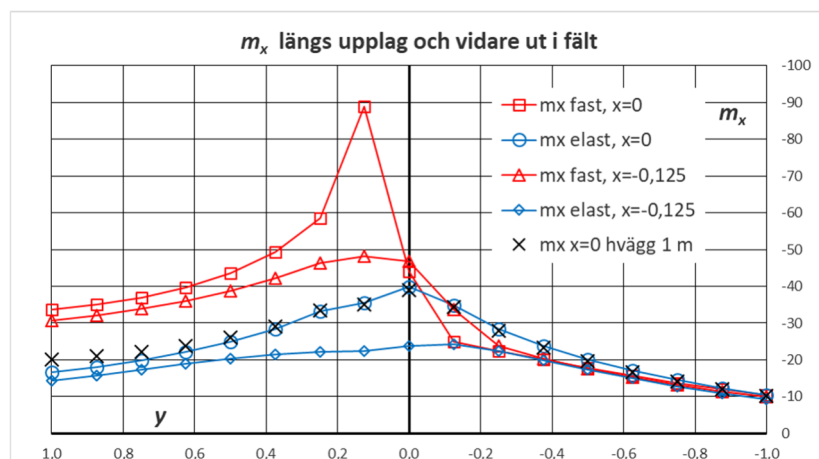
	m_x inom 1,0 m
mindlin 0,5x0,5	-16,3
mindlin 0,25x0,25	-28,0
mindlin 0,125x0,125	-36,2

Vridmomentet m_{xy} är stort i hörnet. Detta skall medtas i dimensionering, se Sektion 3.1.

3.6.2 Elastiskt inspänt upplag

I plattmodellen med mindlinelement 0,125 m och $h = 0,4$ m infördes två (tunna) väggar med höjd 3,0 m och en styvhet motsvarande tjockleken 0,3 m. Väggarna var fast förbundna med plattan.

I Figur 3.6.2.1 visas m_x längs upplagslinjen och vidare ut i fält samt längs en närliggande sektion. Böjmomenten reduceras markant när elastiskt inspända upplag införs. Den höga sidotoppen försvinner och i hörnet sker en stor förändring i vridmomentet m_{xy} , se närmare studium nedan.



Figur 3.6.2.1 Jämförelse av m_x längs upplag och vidare ut i fält, $x = 0$, samt längs närliggande snitt $x = -0,125$. Elastiska resp fast inspända upplag.

En reduktion av vägghöjderna från 3,0 m till 1,0 m gav de i Figur 3.6.2.1 kryssmarkerade värdena. De överensstämmer väl med värdena för vägghöjd 3,0 m. Detta visar att väggarnas översta parti ensamt skapar momentreduktionen jämfört med fast inspänt upplag (från $m_{II} = -114,4$ till $-49,5$). För $y > 0,5$ m har dock vägghöjden synlig inverkan på inspänningsmomentet.

Singulariteten i hörnet ger följande lägre värden vid elastiskt inspänt upplag:

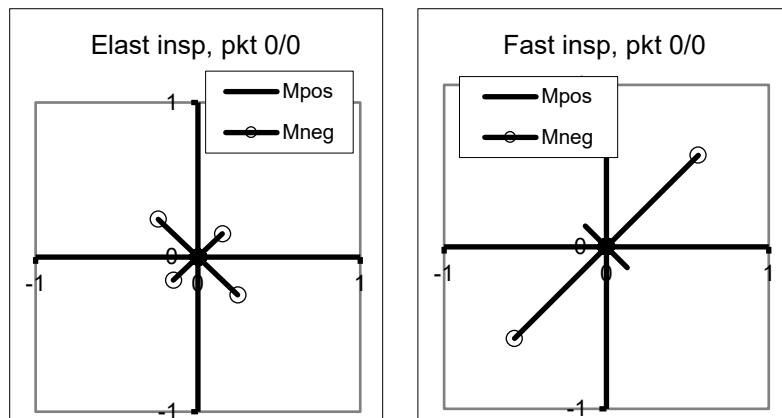
element 0,25	$m_x = -34,3$ kNm/m
element 0,125	$m_x = -39,9$ "
element 0,0625	$m_x = -44,1$ "

Vi studerar hörnet (0/0) samt en punkt strax innanför detsamma (-0,125/-0,125).

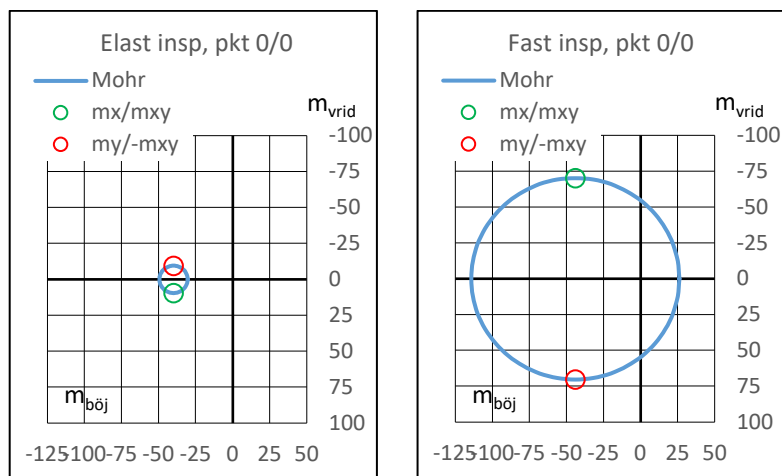
Tabell 3.6.2.1 Snittkrafter i hörnet (0/0).

	m_x	m_y	m_{xy}	m_I	m_{II}	α_b
Fast inspänt upplag	-44,1	-44,1	-70,2	26,1	-114,4	-45°
Elastiskt insp upplag	-39,9	-39,9	9,5	-30,4	-49,5	45°

α_b är vinkeln motsols från x-axeln till största positiva (medräknat tecken) huvudmomentet.



Figur 3.6.2.2 Huvudmoment i inre hörn, samma skala, element 0,125 (x-axel åt höger).

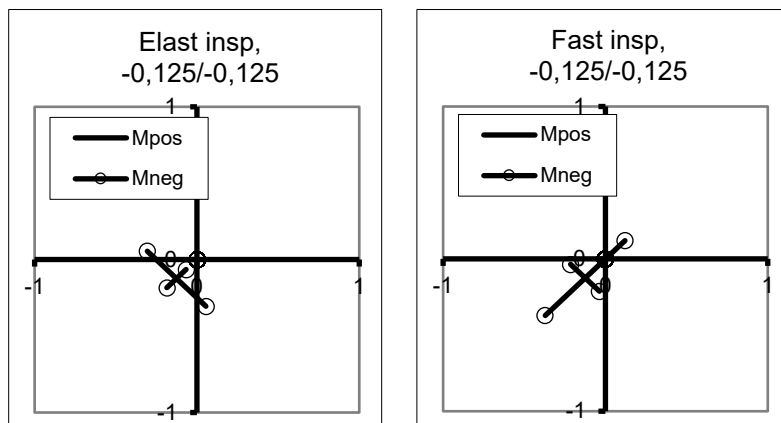


Figur 3.6.2.3 Momenttillstånd visat med Mohrs cirkel.

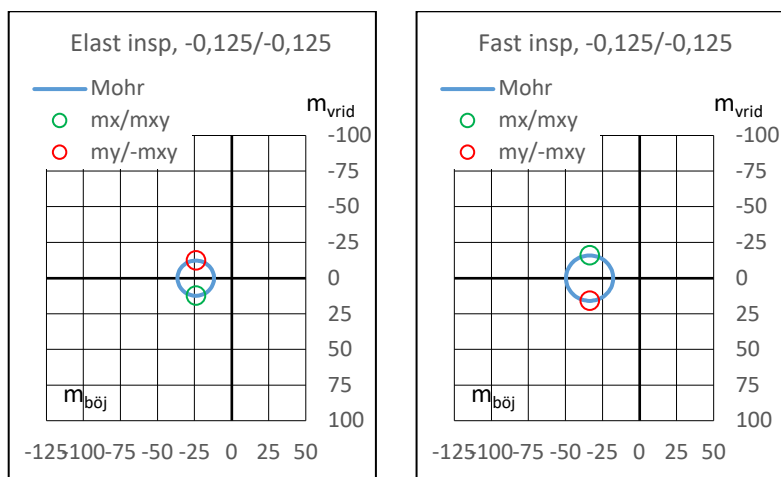
Vid *fast inspänt upplag* har vi ett stort vridmoment i hörnet sammanhängande med ett stort huvudmoment i -45°-riktningen. Vid *elastiskt inspänt upplag* blir momenten reducerade och huvudmomenten markant utjämnade genom att vridmomentet helt reducerats och bytt tecken.

Tabell 3.6.2.2 Snittkrafter i punkt strax innanför hörnet (-0,125/-0,125).

	m_x	m_y	m_{xy}	m_I	m_{II}	α_b
Fast inspänt upplag	-33,7	-33,7	-15,9	-17,8	-49,7	-45°
Elastiskt insp upplag	-24,3	-24,3	12,3	-11,9	-36,6	45°



Figur 3.6.2.4 Huvudmoment i punkt -0,125/-0,125, samma skala.



Figur 3.6.2.5 Momenttillstånd visat med Mohrs cirkel.

Resultat:

Fast inspänt upplag: Toppmomentet invid hörnet blir mycket stort vid fin elementindelning. För medelmomentet på 1,0 m bredd dämpas effekten av singulariteten betydligt.

Beräkningsresultatet för den singulära punkten i hörnet får uppfattas som *en indikation* på höga momenttoppar. Det mindre huvudmomentet har positivt tecken (Figur 3.6.2.2), vilket inte svarar mot beräknade nedböjningar längs denna 45°-linje.

Elastiskt inspänt upplag bör införas. Detta utgör en anpassning till verkliga förhållanden. En allmän momentreduktion i m_x om ca 50% erhöles. Momenttillståndet synes realistiskt (Figur 3.6.2.2) när det stora huvudmomentet kraftigt reduceras och det andra huvudmomentet framkommer med rätt tecken.. Dimensionerande moment i x -riktning $m_x + |m_{xy}|$ och i y -riktning reduceras till mindre än hälften.

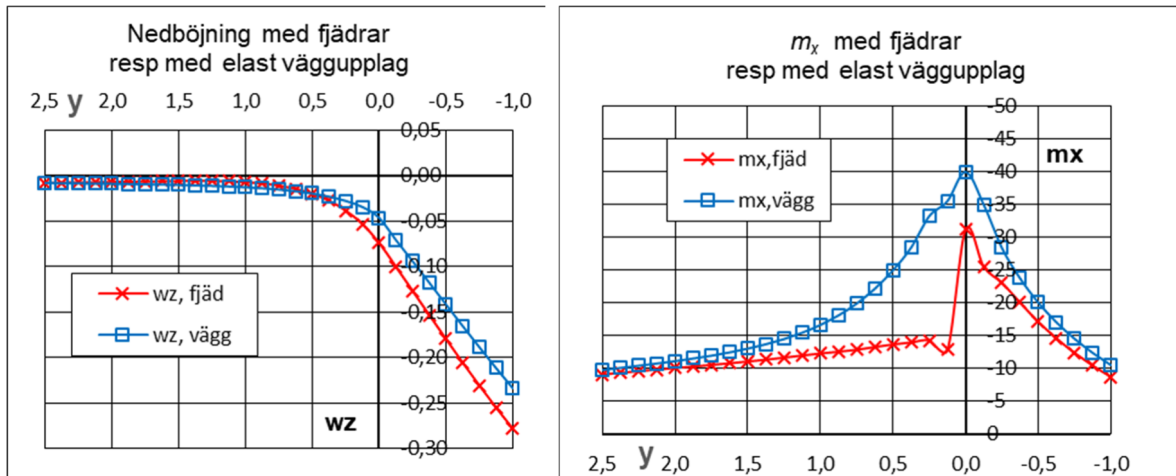
För hörnpartiets del behöver endast övre delen av stödjande vägg medtas i modellen. För $y > 0,5$ m har dock vägghöjden (naturligtvis) inverkan på inspänningsmomentet.

3.6.3 Elastiska fjädrar längs upplag

Att införa *fjädrar* längs upplagslinjerna istället för väggar är inte rättvisande eftersom de inte samverkar på det sätt som elementen i väggen gör. D v s man får fel styvhet i väggen om denna betraktas som flera parallellt stående pelare. Med fjädrande upplagslinjer motsvarande vertikala väggstrimlor (fjädermoduler för vertikalförskjutning 3 000 000 kN/m² resp för

rotation 67 500 kNm/rad/m) erhöjls nedböjningar och böjmoment m_x i stömlinjen och ut i fält enligt Figur 3.6.3.1. Mindlinelement 0,125 m och $h = 0,4$ m.

Jämfört med elastisk väggupplag skiljer momentfördelningen avsevärt. Fjäderuppläggnigen är "mjukare" än vägguppläggnigen och ett momentsprång bildas eftersom fjädrarna närmast hörnet inte känner av närheten till detsamma.



Figur 3.6.3.1a och b Nedböjning (mm) och böjmoment (kNm/m) längs upplag och ut i fält.

4 Koncentrerade stödreaktioner, tvärkrafter

4.1 Allmänt

De i föregående kapitel behandlade plattorna med singularitet i upplag resp fritt hörn skall här studeras m a p stödreaktioner och tvärkrafter. Det gäller plattor med

pelarstöd,
linjeupplags ände,
inåtgående fritt hörn,
inåtgående fritt upplagt hörn och
inåtgående inspänt upplagt hörn.

Vid inåtgående fritt hörn studeras själva hörnet medan i övriga fall studeras upplagsreaktionen samt den singulära punktens omgivning med hänsyn till tvärkraftsfördelning och genomstansning.

För pelarstöd studeras centrisk och excentrisk pelarreaktion samt även praktikfall med plattbroar på ledade pelarstöd.

Plattorna ”Linjestöds ände”, ”Inåtgående upplagt hörn” och ”Inåtgående inspänt hörn” har räknats även med elastiska upplagslinjer.

För inåtgående fritt hörn har tillämpats en modell ”Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk”, där uppläggningen är osymmetrisk kring diagonalen så att en markant tvärkraft erhålls vid det inre hörnet.

Anm: I varje punkt på en platta har vi en huvudtvärkraft i en viss riktning (formel se Sektion 2.1). I den vinkelräta riktningen är tvärkraften noll. I de excelritade huvudtvärkraftsplanerna framgår huvudtvärkrafternas riktning och storlek, men inte ”bärningsriktningen” (av två möjliga). RFEM-planerna ger ledning.

4.2 Stansning, excentrisk kraft

Framställningen nedan avses avspegla bakgrunden till Eurokod 1992-1-1 (2005) kapitel 6.4 vad avser excentrisk kraft vid dimensionering för genomstansning.

Fördela pelarreaktionen på grundkontrollsnittet vilket vid en rund pelare med diametern c är ett runt snitt omkring pelaren med radien $c/2 + 2d$, där d är den effektiva höjden i plattan.

Vertikalkraften V fördelas jämnt runt kontrollsnittet. Skjuvspänningarna av ett moment M kan antas vara fördelade antingen linjärt varierande (elastiskt) eller plastiskt.

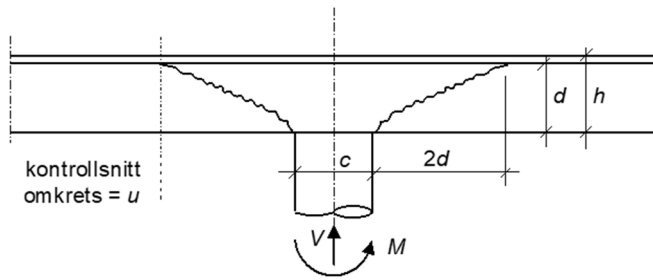
Beräkna tröghetsmomentet hos en cirkelring. Här är D = ytterdiameter och d = innerdiameter.

$$I_x = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(D - d)(D + d)(D^2 + d^2)$$

För en smal cirkelring med bredden t erhålls då

$$I_x = \frac{\pi}{64} \cdot 2t \cdot 2D \cdot 2D^2 = \frac{\pi}{8} \cdot tD^3$$

När ringen vrids så att bredden blir noll och höjden $= t$ gäller samma I_x som ovan. Höjden t behöver inte vara liten.



Figur 4.2.1.

Anm till Figur 4.2.1: En typisk stansspricka i lutning 1:2 är inritad. Kontrollsnittets avstånd till pelarkant är styrt av norm och kommer troligen att ändras i kommande eurokod.

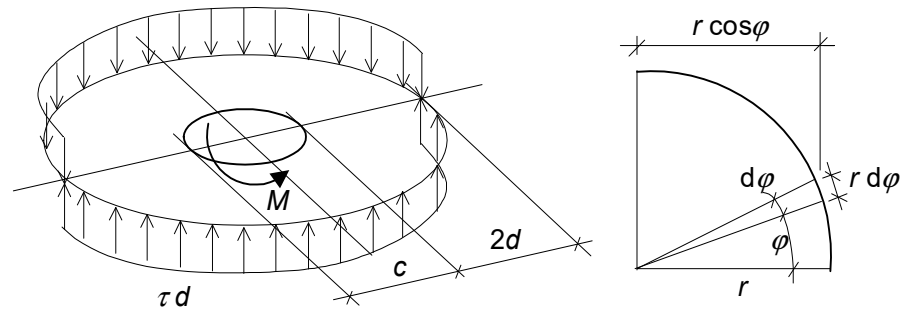
Beräkna max skjuvspänning τ av moment M , elastiskt. Kontrollsnittets radie är r , effektiv höjd är d .

$$\tau = \frac{Mr}{I_x} = \frac{Mr}{\frac{\pi}{8} \cdot d \cdot (2r)^3} = \frac{M}{\pi d r^2}$$

Motsvarande, med konstant τ resp $-\tau$ varvet runt (plastiskt, se Figur 4.2.2), ger

$$M = 4 \int_0^{\pi/2} \tau d \cdot r d\varphi \cdot r \cos \varphi = 4\tau d r^2 \Rightarrow \tau = \frac{M}{4dr^2}$$

d v s något lägre skjuvspänning för samma moment. Detta uttryck används nedan.



Figur 4.2.2.

Inför för momentinverkan faktorn 0,6 såsom i Eurokod 1992-1-1 (2005) ekvation (6.42). Kontrollsnittets radie är $r = c/2 + 2d$ och omkretsen är $u = 2\pi r = 2\pi \cdot (c/2 + 2d) = \pi(c + 4d)$.

Max skjuvspänning av V och M blir

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V}{u \cdot d} + 0,6 \cdot \frac{M}{4dr^2} = \frac{V}{u \cdot d} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{\pi(c + 4d) \cdot d}{V} \cdot \frac{M}{4d \cdot (c/2 + 2d)^2} \right) = \\ &= \frac{V}{u \cdot d} \cdot \left(1 + 0,6\pi \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{1}{c + 4d} \right) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

vilket stämmer med ekvation 6.38 och 6.42 i Eurokod 1992-1-1. (Vid pelare med kvadratisk tvärsnitt (ekvation 6.41) kan istället räknas med cirkulär tvärsnitt med samma tvärarea.)

Reduktionsfaktorn 0,6 kan vara en anpassning till försöksresultat eller till beräkningsresultat. "...its value is a function of the proportions of the unbalanced moment transmitted by uneven shear and by bending and torsion".

Formeln kan skrivas: $\tau = \frac{V}{u \cdot d} \cdot \left(1 + 0,94 \cdot \frac{e}{r}\right)$ där e är stödreaktionens excentricitet och r är kontrollsnittets avstånd från stödcentrum.

4.3 Pelarstöd

4.3.1 Inre pelarstöd

Dimensionering för genomstansning utförs för upplagskraft och kraftexcentricitet enligt aktuella normer. Vid inspänd pelare framgår kraftexcentriciteten av pelarens snittkrafter.

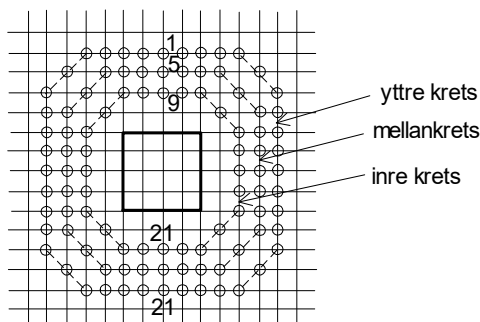
Huvudtvärkraften längs kretsar runt ett pelarstöd studeras dels med centrisk pelarreaktion och dels med en reaktionsexcentricitet om 0,5 m.

Fritt upplagd platta 20 x 20 m med centriskt pelarstöd i form av stödyta 1,0 x 1,0 m, $h = 0,4$ m. Fördelad last $q = 10$ kN/m².

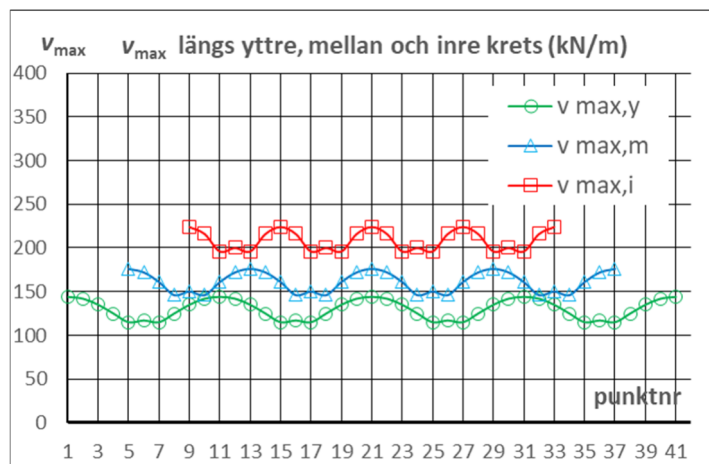
Pelarstödet har i modellen utformats som en kvadratisk stödyta 1,0 x 1,0 m i form av en uppåtriktad ytlast om 1414 kN/m² resulterande i att nedböjningen i mittpunkten blir noll. Mindlinelement 0,25x0,25 m, $\nu = 0$. Samma modell användes i Sektion 3.2.

Centrisk pelarreaktion

Pelarreaktionen ansattes som en uppåtriktad ytlast med $r_z = 1414$ kN/m², d v s totalt 1414 kN.



Figur 4.3.1.1 Redovisningspunkter för huvudtvärkraft runt pelarstöd, element 0,25x0,25 m.



Figur 4.3.1.2 Huvudtvärkraft i nodpunkter längs kretsar runt pelare med centrisk pelarreaktion.

Ovan visas huvudtvärkraft i nodpunkter; medsols utgående från övre mittpunkt i planfiguren.

Resultat:

Tabell 4.3.1.1 Huvudtvärkraft runt pelare med centrisk pelarreaktion.

	kretslängd (m)	V integrerat (kN)	v_{\max} (kN/m)	v_{medel} (kN/m)	$v_{\max}/v_{\text{medel}}$
inre krets	6,83	1413	224	207	1,08
mellankrets	8,83	1407	176	159	1,10
yttre krets	10,83	1392	144	128	1,12

Anm. Istället för $v_{\max,\max}$ och $v_{\max,\text{medel}}$ skrivs v_{\max} resp v_{medel} .

Som jämförelse handberäknas V integrerat såsom reaktionen 1414 kN minus q -lasten inom kretsen till 1379, 1356 resp 1329 kN. Värdena i tabellen är något större emedan v_{\max} har riktningar som avviker något från kretslinjenormalen.

Integreringen har utförts med hänsyn tagen till de varierande punktavstånden i kretsarna. Kurvornas svackor kan förklaras med att punkterna i 45° -riktning har större avstånd från stödcentrum än vad toppunkterna har.

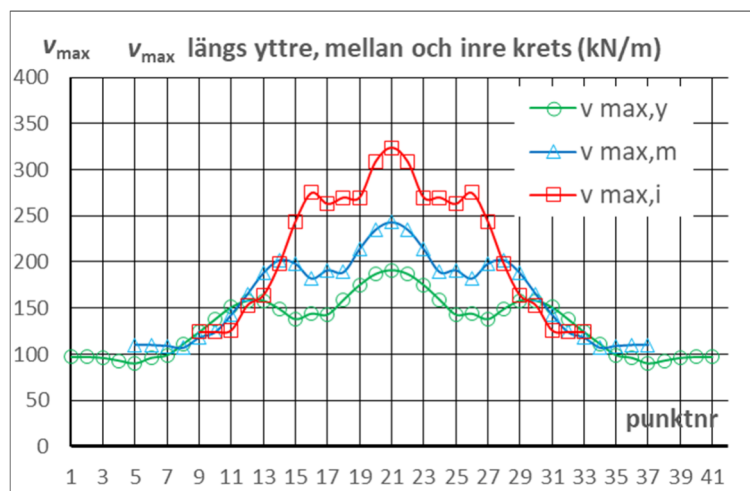
Med cirkulär rotationssymmetrisk geometri hos modell och kretsar skulle kurvorna i diagrammet bli rätta linjer.

Exemplet tjänar som inledning till följande exempel samt efterföljande kapitel.

Reaktionsexcentricitet 0,5 m

Pelarreaktionen ansattes som en i y -led linjärt varierande uppåtriktad ytlast med $r_z = 5656$ kN/m² längs nedre pelarkanten (i planen) och $r_z = -2828$ kN/m² längs den övre, resulterande i en pelarreaktion lika med 1414 kN med momentet 707 kNm. Ett nodupplag som var infört i mittpunkten som kontroll erhöll lasten 0,5 kN, d v s ≈ 0 .

Nedan visas huvudtvärkraft i nodpunkter; medsols utgående från övre mittpunkt i Figur 4.3.1.1. ovan.



Figur 4.3.1.3 Huvudtvärkraft i nodpunkter längs kretsar runt pelare med excentrisk pelarreaktion.

Resultat:

Tabell 4.3.1.2 Huvudtvärkraft runt pelare med excentrisk pelarreaktion.

	kretslängd (m)	V integrerat (kN)	v_{\max} (kN/m)	v_{medel} (kN/m)	$v_{\max}/v_{\text{medel}}$
inre krets	6,83	1484	324	217	1,49
mellankrets	8,83	1453	243	164	1,48
yttre krets	10,83	1424	191	131	1,45

Anm. Istället för $v_{\max, \max}$ och $v_{\max, \text{medel}}$ skrivs v_{\max} resp v_{medel} .

Som jämförelse handberäknas V integrerat såsom reaktionen 1414 kN minus q -lasten inom kretsen till 1379, 1356 resp 1329 kN. Värdena i tabellen är något större emedan v_{\max} har riktningar som avviker något från kretslinjenormalen.

Kvoten $v_{\max}/v_{\text{medel}}$, vilken kan benämnas "tilläggsfaktor" vid stansningsdimensionering, blev i stort sett densamma för de olika kretsarna. I ett praktiskt fall kan de lokala topparna jämnas ut.

Resultatet för $v_{\max}/v_{\text{medel}}$ jämförs med resultatet av metoden i Eurokod 1992-1-1 (2005) kapitel 6.4, se ovan i Sektion 4.2.

Den kvadratiske pelarytan ersätts med en cirkulär med samma yta. Diameter $c = 1,128 \cdot 1,0 = 1,128$ m.

Effektiv höjd $d = 0,9 \cdot 0,4 = 0,36$ m.

Kontrollsnittets längd $u = \pi (c + 4d) = \pi (1,128 + 4 \cdot 0,36) = 8,068$ m.

$$\tau = \frac{V}{u \cdot d} \cdot \left(1 + 0,6\pi \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{1}{c + 4d} \right) = \frac{1414}{8,068 \cdot 0,36} \cdot \left(1 + 0,6\pi \cdot \frac{707}{1414} \cdot \frac{1}{1,128 + 4 \cdot 0,36} \right) = 487 \cdot (1 + 0,367)$$

Medeltvärkraften blir $487 \cdot 0,36 = 175$ kN/m, d v s något större än i mellankretsen ovan emedan u är något kortare än kretslängden. Tilläggsfaktorn blev 1,367.

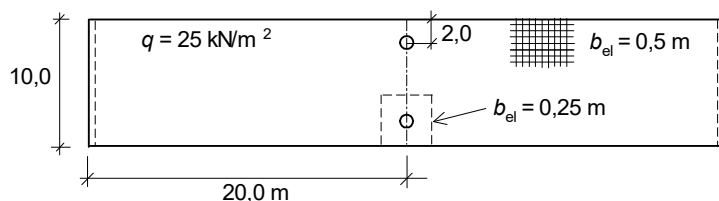
Resultat:

Det integrerade värdet av huvudtvärkrafterna motsvarar den vertikala upplagsreaktionen. Tilläggsfaktorn = relationen $v_{\max}/v_{\text{medel}}$ blev i stort sett densamma, ca 1,48, för de olika kretsarna. Eftersom relationen vid centrisk pelarreaktion var 1,10 och rätteligen borde varit 1,00 kan ökningen av reaktionens excentricitet sägas motsvara en relation lika med $1,48 / 1,10 = 1,35$.

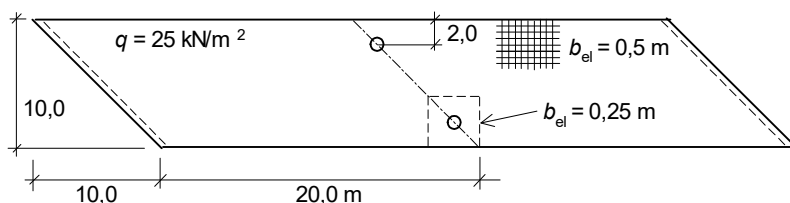
Tilläggsfaktorn enligt Eurokod blir i detta fall 1,367, vilket stämmer väl med FEM-beräkningens resultat. Sambandet är dock inte så klart eftersom eurokodvärdet varierar mer beroende av dubbla kontrollsnittsavståndet $c + 4d$ än vad $v_{\max}/v_{\text{medel}}$ varierar i tabellen. Exempelvis $d = 0,6$ m ger $\tau = 213 \cdot (1 + 0,267)$, d v s tilläggsfaktor 1,267 medan relationen $v_{\max}/v_{\text{medel}}$ reduceras obetydligt vid ökat kontrollsnittsavstånd.

4.3.2 Plattbroar på ledade pelarstöd

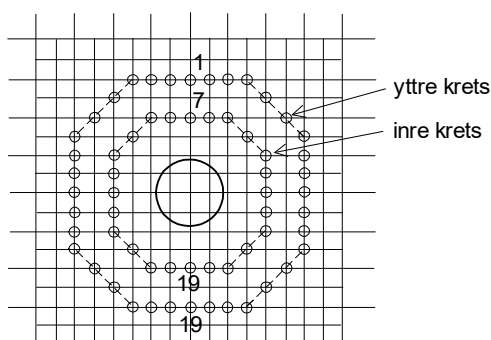
Vid ledad pelare utan kraftexcentricitet är tvärkraftsfördelningen (kN/m) runt pelaren ofta icke rotationssymmetrisk, vilket visas i följande exempel med en rätvinklig och en snedvinklig platta på två pelare i form av nodupplag i mittstöd. Mindlinelement $0,5 \times 0,5$ och $0,25 \times 0,25$ m, $h = 1,0$ m, $\nu = 0$, fördelad last $q = 25 \text{ kN/m}^2$.



Figur 4.3.2.1 Rätvinklig platta på ledade pelarstöd. Elementmått $b_{el} = 0,5$ och $0,25$ m.



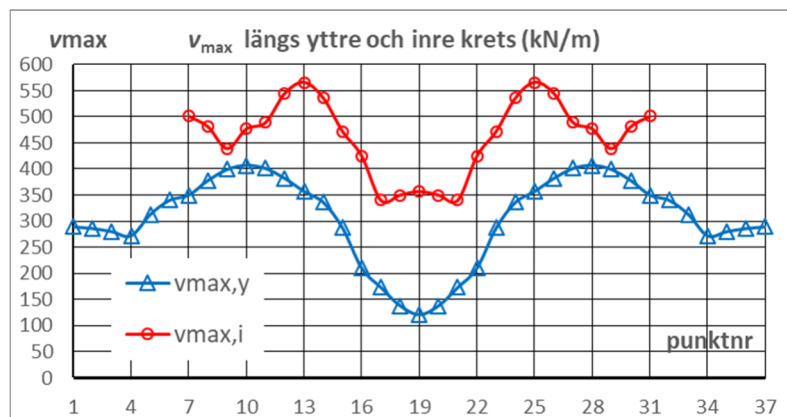
Figur 4.3.2.2 Snedvinklig platta på ledade pelarstöd.



Figur 4.3.2.3 Redovisningspunkter för huvudtvärkraft runt pelarstöd, element $0,25 \times 0,25$ m.

Huvudtvärkraften i nodpunkter längs två kretsar runt ledat pelarstöd redovisas för de två plattorna i planfiguren ovan.

Rätvinklig platta: Huvudtvärkraft i nodpunkter; medsols utgående från övre mittpunkt i planfiguren, se Figur 4.3.2.4.



Figur 4.3.2.4 Huvudtvärkraft i nodpunkter; i yttre resp inre krets runt ledad pelare i rätvinklig platta.

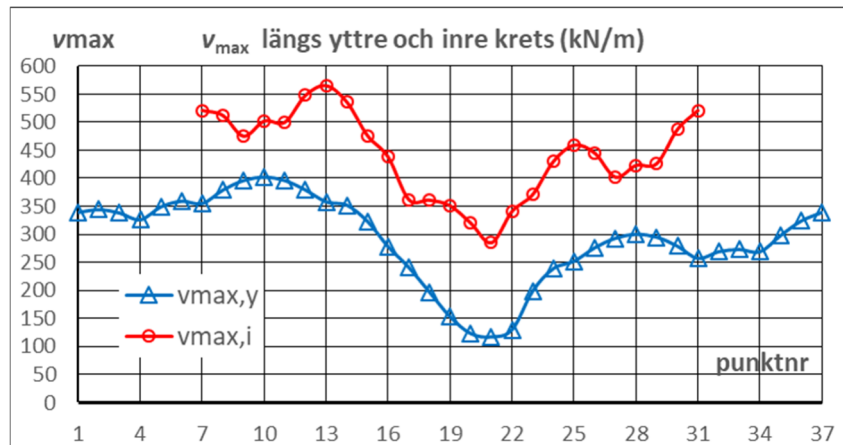
Yttre krets: $v_{\max,\max} = 407 \text{ kN/m}$, medel = 307, kvot = 1,33.

Inre krets: $v_{\max,\max} = 566 \text{ kN/m}$, medel = 460, kvot = 1,23.

V integrerat blir 3147 och 3143 kN i yttre resp inre krets.

Jämför med stödreaktionen 3117 kN minus last innanför kretsen $3117 - 177 = 2940$ resp $3117 - 79 = 3038 \text{ kN}$. V integrerat blir något större emedan v_{\max} har riktningar som avviker något från kretslinjenormalen.

Snedvinklig platta: Huvudtvärkraft i nodpunkter; medsols utgående från övre mittpunkt i planfiguren, se Figur 4.3.2.5.



Figur 4.3.2.5 Huvudtvärkraft i nodpunkter; i yttre resp inre krets runt ledad pelare i snedvinklig platta.

Yttre krets: $v_{\max,\max} = 402 \text{ kN/m}$, medel = 291, kvot = 1,38.

Inre krets: $v_{\max,\max} = 565 \text{ kN/m}$, medel = 437, kvot = 1,29.

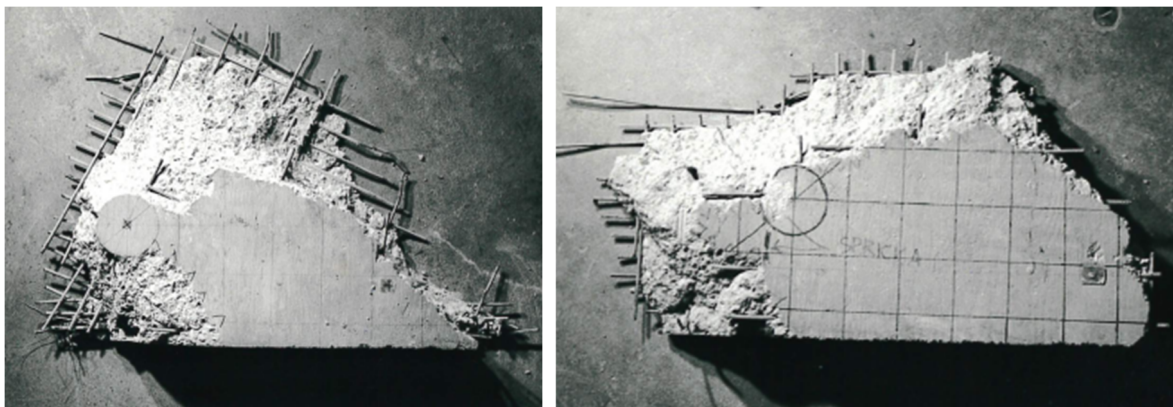
V integrerat blir 2985 och 2983 kN i yttre resp inre krets.

Jämför med stödreaktionen 2954 kN minus last innanför kretsen $2954 - 177 = 2777$ resp $2954 - 79 = 2875 \text{ kN}$. V integrerat blir något större emedan v_{\max} har riktningar som avviker något från kretslinjenormalen.

Max (sned) huvudtvärkraft är alltså 23% à 38% större än resp medelvärde runt kretsen. I den snedvinkliga plattan är tvärkraften störst vid trubbigt hörn. Pelaranslutningen var i dessa fall ledad, d v s utan excentricitet i stödreaktionen.

Författaren utförde experimentell provning av fyra snedvinkliga tvåspanss betongplattor på vardera två ledade pelarstöd i innerstöd (Hallbjörn (1968)). För två av dem visas nedan urtagna "stanskoner" sedda underifrån. Plattorna hade följande mått: spännvidd parallellt fria kanten $2,8 + 2,8 \text{ m}$, spännvidd vinkelrätt mot stödlinje $1,8 \text{ m}$, bredd $1,24 \text{ m}$, avstånd mellan pelarcentrum och fri kant $0,248 \text{ m}$, plattjocklek $0,135 \text{ m}$ och snedvinklighet 50° . Lasten var jämnt fördelad i form av 16 st lika punktlaster per spann. Böjarmeringen hade olika riktningar i de två plattorna och skjuvarmering lades inte in.

Sekundära stansbrott utbildades (efter stora böj deformationer) i vänstra delen av stanskonerna i figurerna, vid trubbigt hörn, och böjbrott i den högra delen. Detta illustrerar inverkan av icke rotationssymmetri hos tvärkraften runt det ledade pelarstödet.



Figur 4.3.2.6a och b Urtagna "stanskoner" ur 50° snedvinkliga tvåspanns plattor; i resp bild är trubbigt hörn till vänster och spetsigt till höger; centrisk stödreaktion; Hallbjörn (1968).

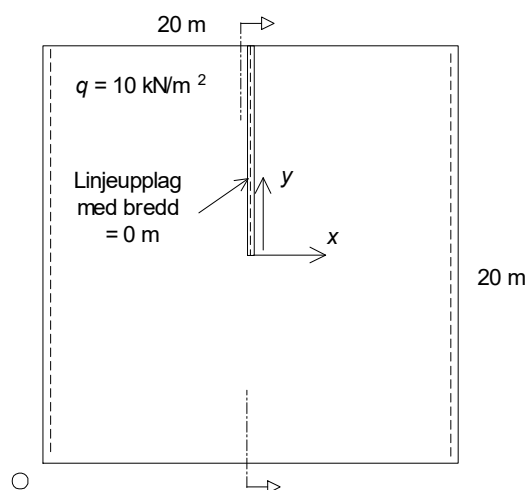
Anm. Man kan möjligen fundera över hur jämvikt uppnås vid centrisk pelarreaktion och ojämnt fördelad huvudtvärkraft. Detta är emellertid inte konstigare än för ett fritt upplagt ändstöd hos en balk. Tvärkraften balanseras av momentvariation.

4.4 Linjeupplags ände

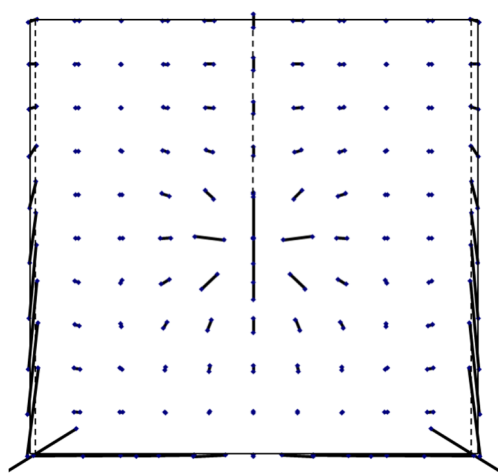
4.4.1 Fast upplag

En platta 20x20 m enligt Figur 4.4.1.1 har beräknats med kvadratiska mindlinelement med sidmått 1,0, 0,5, 0,25 och 0,125 m. $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 10$ kN/m². Detta är samma platta som i Sektion 3.3.

I stöddande i $x/y = 0/0$ erhålls en hög upplagsreaktion. Detta är en singularär punkt där plattans moment och tvärkrafter växer obegränsat vid finare elementindelning.



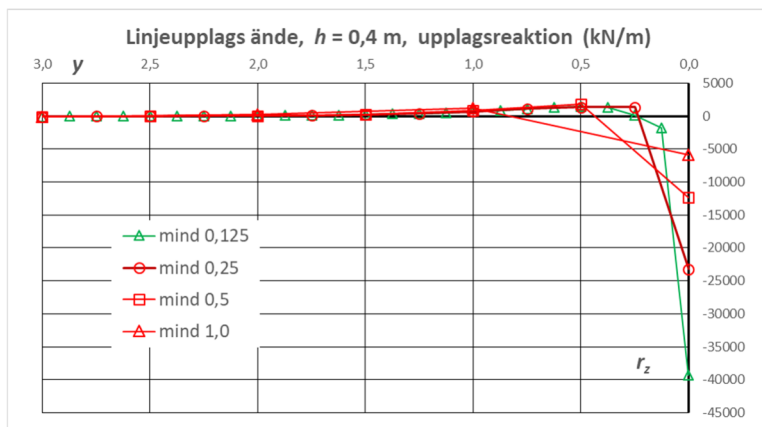
Figur 4.4.1.1 Studerad platta.



Figur 4.4.1.2 Huvudtvärkrafter, mindlinelement 0,5x0,5 m, gles redovisning.

Längs upplagda kanter är tvärkraftens komponent vinkelrätt kanten lika med upplagsreaktionen och komponent parallellt med kanten lika med kanttillskottet (m_{xy}), se Sektion 2.1.

Upplagsreaktionen längs linjeupplaget $x = 0$ visas i Figur 4.4.1.3. Den högra ändpunkten $y = 0$ är linjeupplagets ände i modellen.



Figur 4.4.1.3 Upplagsreaktion längs del av linjeupplag.

Anm: I diagrammets vänstra del är stödreaktionen ca -125 kN/m som för en balk.

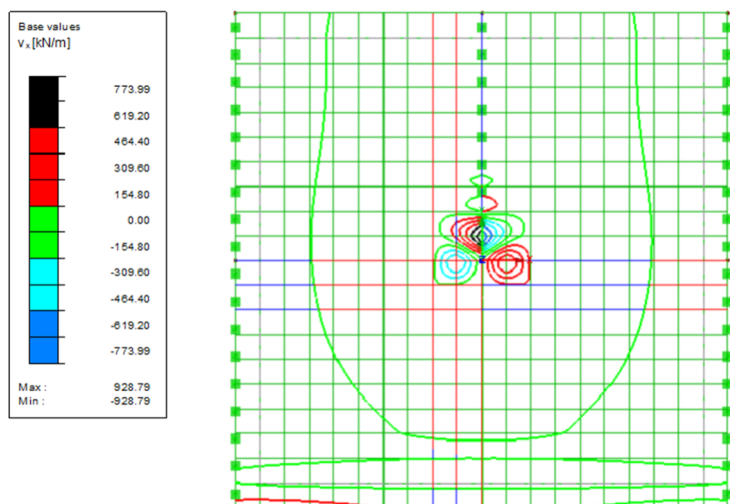
Inom sträckan $y = 0$ till 2,0 m är upplagsreaktionen påverkad av stödändan och vi summerar reaktionen och beräknar kraftexcentriciteten kring stödändan. De relativt små vertikala dragreaktionerna inom delsträckan $y = 1,0$ till 2,0 medtas emedan de märkbart påverkar resultatet. Beräkningen sker med stapeldiagram med stapelbredd = b_{el} (elementbredden), dock i intervallets ändar $b_{el}/2$ med kraften placerad i stapelns tyngdpunkt. (Negativ kraftexcentricitet innebär resultantläge till höger om stödändan i diagrammet.)

Tabell 4.4.1.1 Upplagsreaktion inom 2,0 m.

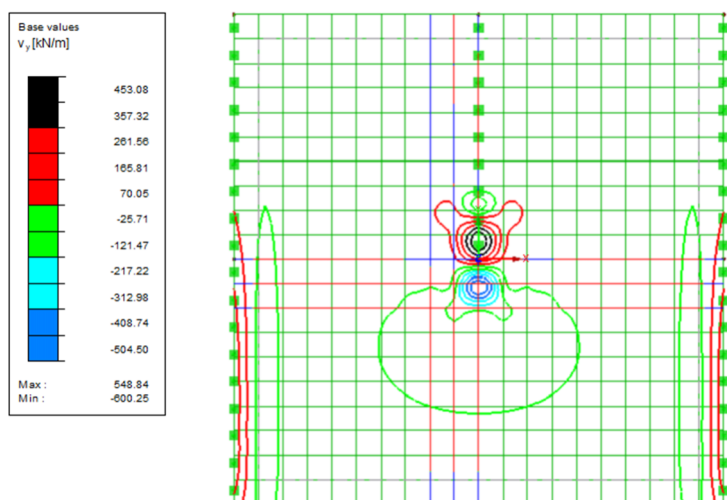
	R_z (kN)	Excentricitet (m)
mindlin 1,0x1,0	-1634	-0,326
mindlin 0,5x0,5	-1564	-0,473
mindlin 0,25x0,25	-1565	-0,482
mindlin 0,125x0,125	-1568	-0,504

De tre kurvorna 0,5, 0,25 och 0,125 ger ungefär samma resultat, vilket innebär att man i ett praktiskt fall har en viss frihet i valet av elementstorlek.

Kraftresultanten är alltså ca 1565 kN och dess läge är ca 0,48 m till höger om stödändan i diagrammet ovan.



Figur 4.4.1.4 Tvärkraftsplan v_x , bäring i riktning mot vänstra upplaget räknas som positiv, mindlinelement 1,0 x 1,0 m.



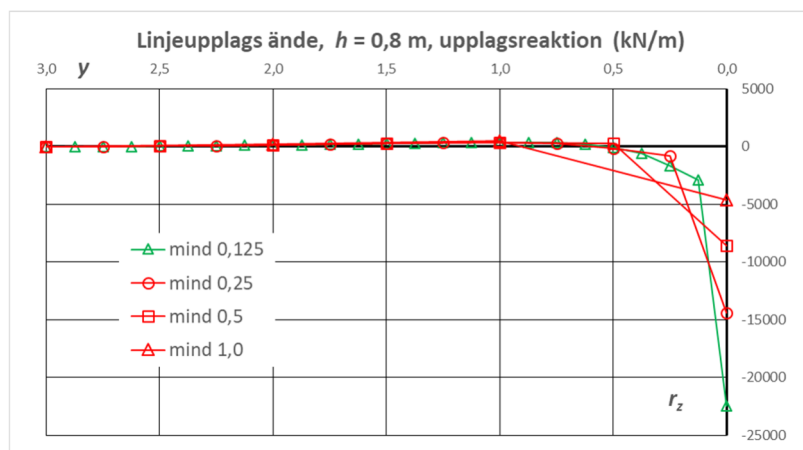
Figur 4.4.1.5 Tvärkraftsplan v_y , bärning i riktning nedåt i figuren räknas som positiv, mindlinelement $1,0 \times 1,0$ m.

4.4.2 Fast upplag, större plattjocklek

Plattan i Sektion 4.4.1 ovan studeras här med plattjockleken ökad till $h = 0,8$ m.

Med fördubblad plattjocklek ökar böjstyvheten med en faktor åtta och skjuvstyvheten med en faktor två. Den relativa skjuvstyvheten har alltså reducerats till en fjärdedel.

Upplagsreaktionen längs linjeupplaget $x = 0$ visas i Figur 4.4.2.1. Den högra ändpunkten $y = 0$ är linjeupplagets ände i modellen.



Figur 4.4.2.1 Upplagsreaktion längs del av linjeupplag, $h = 0,8$ m.

Tabell 4.4.2.1 Upplagsreaktion inom $2,0$ m.

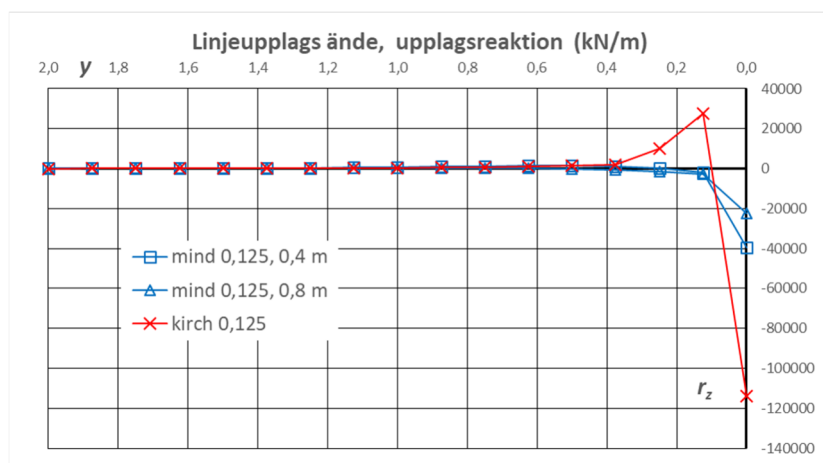
	R_z (kN)	Excentricitet (m)
mindlin $1,0 \times 1,0$	-1687	-0,071
mindlin $0,5 \times 0,5$	-1639	-0,153
mindlin $0,25 \times 0,25$	-1639	-0,182
mindlin $0,125 \times 0,125$	-1643	-0,197

Jämfört med resultatet i Sektion 4.4.1 med plattjockleken $h = 0,4$ m blev upplagskraften 5% större, huvudsakligen beroende av att uppkomna små nedåtriktade upplagsreaktioner inom $y = 2,0$ till $3,0$ m inte medtagits i summeringen. Som följd av att den relativa skjuvstyvheten minskats till en fjärdedel har de nedåtriktade upplagsreaktionerna (vertikalt drag) mellan ca $y = 0,25$ och $1,25$ samt toppvärdena i upplagsändan reducerats betydligt. Kraftresultanten har förskjutits åt vänster i diagrammet.

4.4.3 Fast upplag, kirchoffelement

Här sker en jämförelse av plattorna i Sektion 4.4.1 ($h = 0,4$ m) och 4.4.2 ($h = 0,8$ m) med en beräkning med kirchoffelement (där plattjockleken inte påverkar resultatet).

Upplagsreaktioner längs linjeupplaget $x = 0$ visas i Figur 4.4.3.1. Den högra ändpunkten $y = 0$ är linjeupplagets ände i modellen.



Figur 4.4.3.1 Upplagsreaktion längs del av linjeupplag, med mindlin- och kirchoffelement.

Summa upplagsreaktion inom $y = 0$ till $2,0$ beräknas. De relativt små positiva värdena vid $y > 0,4$ m framgår inte av diagrammet, men medtas eftersom de har betydelse för resultatet.

Tabell 4.4.3.1 Upplagsreaktion inom $2,0$ m.

	R_z (kN)	Excentricitet (m)
kirchoff 0,125x0,125	-1529	-0,736
mindlin 0,125x0,125, $h=0,4$ m	-1568	-0,504
mindlin 0,125x0,125, $h=0,8$ m	-1643	-0,197

Med kirchoffelement, vilka saknar skjuvdeformationer, blir toppen mycket hög, summakraften något lägre och excentriciteten större. Mindlinelement, där skjuvdeformationer medräknas, ger en utjämning av stödreaktionen.

4.4.4 Elastiskt upplag

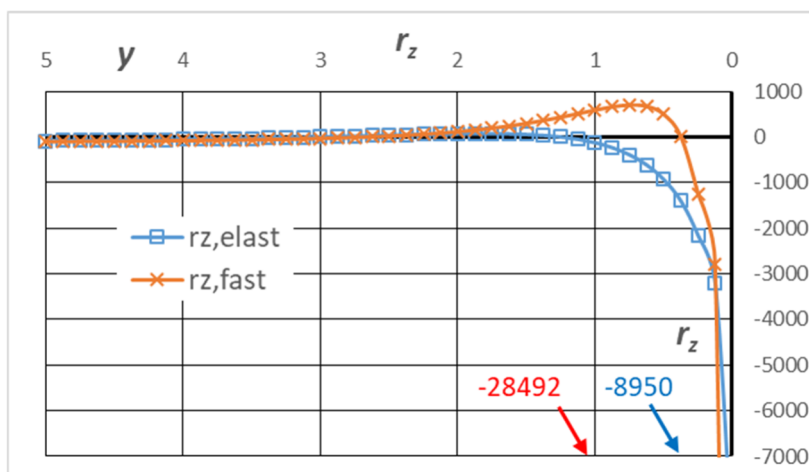
En anpassning till verkliga förhållanden är ofta att införa elastiska upplag, vilket har fördelen att spänningstoppar reduceras.

Plattan 20×20 m har räknats med mindlinelement $0,125 \times 0,125$ m, tjockleken $h = 0,6$ m och $q = 10$ kN/m². Linjeupplaget i mittlinjen utformades som elastiskt upplag i form av en tunn och i botten understödd vägg med höjd 5 m och en styvhet motsvarande tjockleken $0,3$ m.

Som upplagsreaktion används här vertikalkraften i ett väggsnitt i nivå $z = -0,0$ m.

Jämförelse sker med en likadan platta med fast linjeupplag och $h = 0,6$ m.

Upplagsreaktionen längs linjeupplaget $x = 0$ visas i Figur 4.4.4.1. Den högra ändpunkten $y = 0$ är linjeupplagets ände i modellen.



Figur 4.4.4.1 Upplagsreaktion längs stödlinjen, element 0,125 m.

Vid fast upplag uppkommer vertikala dragkrafter inom intervallet $0,375 < y < 2,5$ m.

Vid elastiskt upplag blir toppvärdet kraftigt reducerat och reaktionen utjämnad.

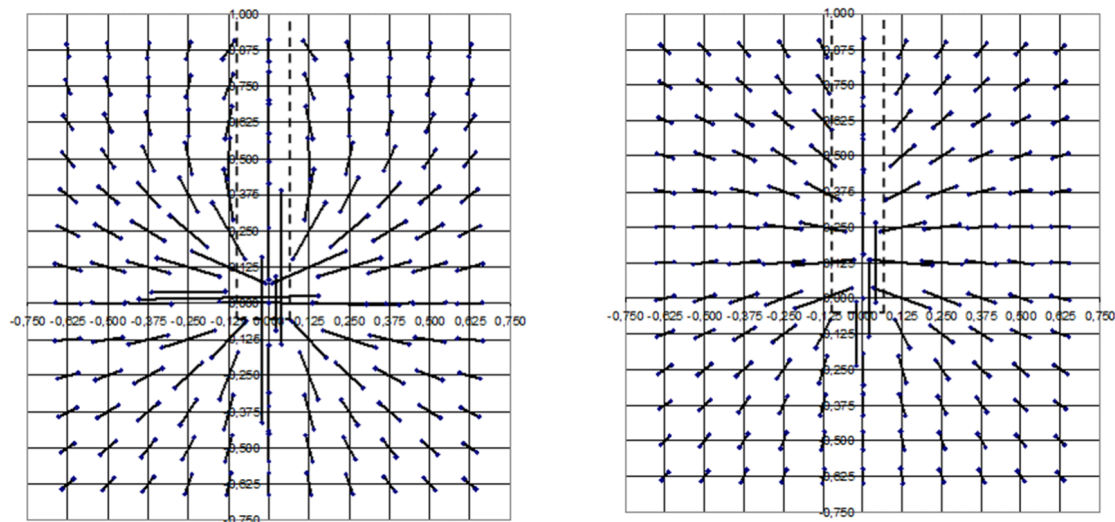
Summa upplagsreaktion vid stödande från $y = 0$ till 2,0 m beräknas (räknat med stapeldiagram).

Tabell 4.4.4.1 Upplagsreaktion inom 2,0 m.

	R_z (kN)	Excentricitet (m)
Fast upplag	-1606	-0,350
Elastiskt upplag	-1647	0,190

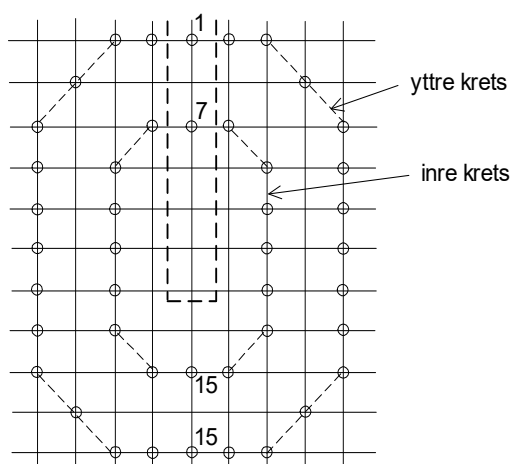
Anm. Värdena för fast upplag ligger mellan dem för $h = 0,4$ m och $0,8$ m i Sektion 4.4.1 och 4.4.2.

Huvudtvärkrafterna i och kring stödslutet åskådliggörs av Figur 4.4.4.2. Lastinförningen mot stödlinjen blir koncentrerad vid fast upplag och fördelad vid elastiskt upplag.

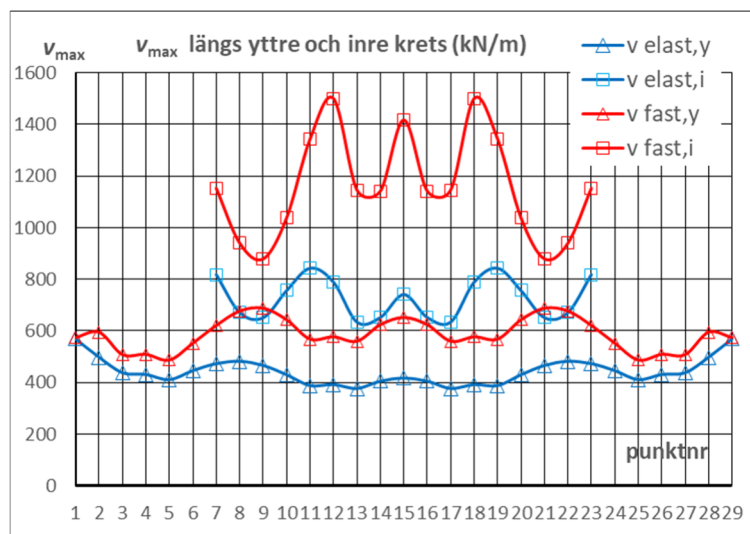


Figur 4.4.4.2a och b Huvudvärkter kring stödslutet, till vänster fast upplag och till höger elastiskt upplag, samma skala, element 0,125 m. Några tvärkraft-symboler är sidoförskjutna för tydlighets skull.

Huvudvärkraften kring stödslutet visas längs en yttre och en inre krets runt stödändan i Figur 4.4.4.3 och 4.4.4.4. Punktnumreringen är medsols utgående från övre mittpunkt i planfiguren.



Figur 4.4.4.3 Redovisningspunkter för huvudvärkraft runt stödände, element 0,125 m.



Figur 4.4.4.4 Huvudvärkraft längs yttre och inre krets, element 0,125 m.

Med hänsyn till en tänkt stansspricka är tvärkraften på avståndet $h/2$ från stödet intressant. Ett sådant snitt illustreras av kurvorna för inre krets ovan.

Man bör ha minst två element mellan studerat snitt och upplag. Av denna anledning har den fina elementstorleken 0,125 m tillämpats. Stödänden är, även med elastiskt upplag, en singular punkt.

Resultat:

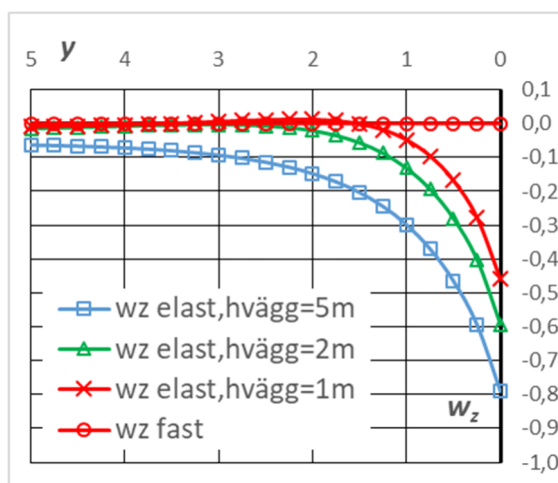
Elasticiteten hos stödlinjen bör ingå i beräkningsmodellen eftersom detta är en anpassning till verkligheten som ger stor inverkan på upplagsreaktionens fördelning. Reaktion med omvänt tecken (vertikal dragkraft) uteblir i detta fall nästan helt och tvärkraften runt stödänden reduceras betydligt.

Resultatet blir praktiskt taget lika för vägghöjderna 5,0, 2,0 och 1,0 m (se figurer nedan), varav framgår att endast väggens översta parti skapar lastfördelningen i detta fall.

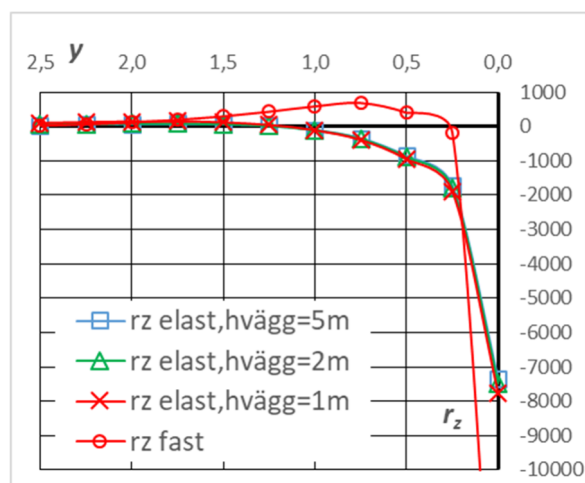
Genomstansningslasten vid elastiskt upplag kan i detta fall bestämmas såsom summa upplagsreaktion inom 1,125 m längd invid stödänden (jämför Figur 4.4.4.1)

Kretsarna ovan ligger inom en tänkt stansspricka med avsikten att påvisa eventuella stora variationer i tvärkraftsfördelningen. För inre krets vid elastiskt upplag visar sig i detta fall variationen vara ringa när kurvan något utjämnas.

Nedan visas inverkan av olika höjd hos den stödjande elastiska väggen. Här har element 0,25 m tillämpats och upplagsreaktionen är vertikalkraften i väggen i nivå $z = -0,0$. Jämförelse sker med fast upplag.

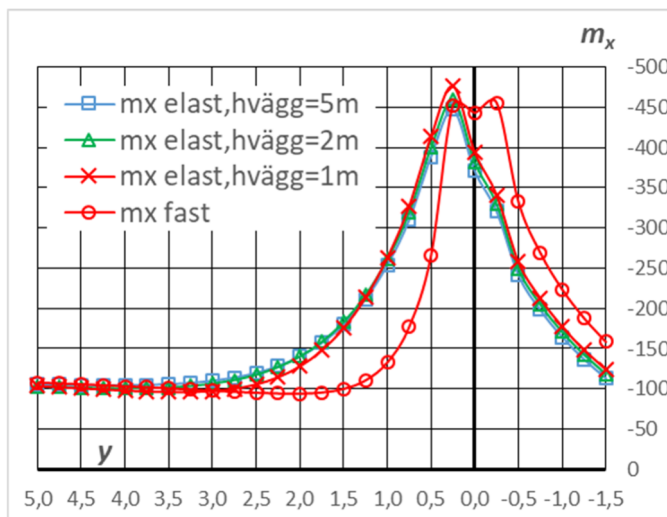


Figur 4.4.4.5 Nedböjning (mm) längs upplag vid vägghöjd 5,0, 2,0 och 1,0 m.



Figur 4.4.4.6 Upplagsreaktion (kN/m) längs upplag vid vägghöjd 5,0, 2,0 och 1,0 m.

Upplagsreaktionens och böjmomentets fördelning är praktiskt taget lika för vägghöjderna 5,0, 2,0 och 1,0 m, vilket innebär att tvärkrafterna i plattorna också är praktiskt taget lika. Väggaras översta parti skapar ensamt lastfördelningen i detta fall.



Figur 4.4.4.7 Böjmoment m_x (kNm/m) i plattan längs upplagslinjen och ut i fält.

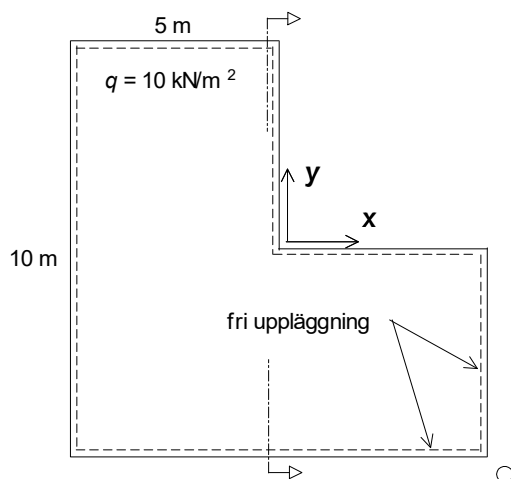
4.5 Inåtgående upplagt hörn

4.5.1 Fast upplag

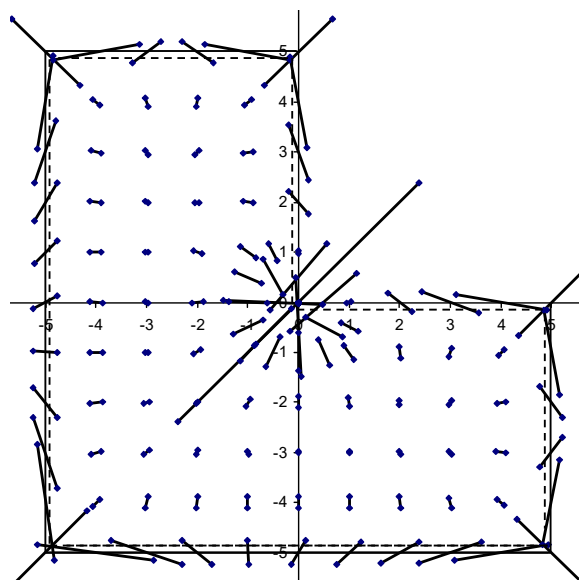
En platta 10x10 m enligt Figur 4.5.1.1 har beräknats med kvadratiska mindlinelement med sidmått 1,0, 0,5, 0,25 och 0,125 m. $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 10$ kN/m². I det inre hörnet ansluter två fritt upplagda kanter ("fast upplag"). Detta är samma platta som i Sektion 3.5.

Det inre hörnet i $x/y = 0/0$ med omgivning studeras. Där erhålls en hög upplagsreaktion. Detta är en singular punkt där plattans moment och tvärkrafter växer obegränsat vid finare elementindelning.

I hörnet råder praktiskt taget taget fast inspänning p g a upplagsvinkelns stora styvhet.



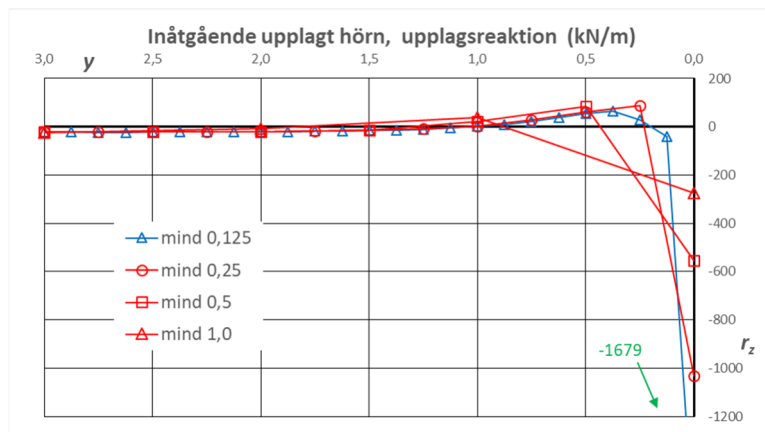
Figur 4.5.1.1 Studerad platta.



Figur 4.5.1.2 Huvudtvärkrafter, mindlinelement 0,25x0,25 m, gles redovisning.

Längs upplagda kanter är tvärkraftens komponent vinkelrätt kanten lika med upplagsreaktionen och komponent parallellt med kanten lika med kanttillskottet (m_{xy}), se Sektion 2.1.

Upplagsreaktionen längs kanten $x = 0$ fram till det inre hörnet i $y = 0$ visas i Figur 4.5.1.3.



Figur 4.5.1.3 Upplagsreaktion längs upplagslinje vid inre hörn.

Inom sträckan $y = 0$ till 1,0 m är upplagsreaktionen påverkad av stödändan och vi summerar reaktionen och beräknar kraftexcentriciteten kring stödändan. Beräkningen sker med stapeldiagram med stapelbredd = b_{el} (elementbredden), dock i intervallets ändar $b_{el}/2$ med kraften placerad i stapelns tyngdpunkt. (Negativ kraftexcentricitet innebär resultantläge till höger om stödändan i diagrammet.)

Tabell 4.5.1.1 Upplagsreaktion inom 1,0 m.

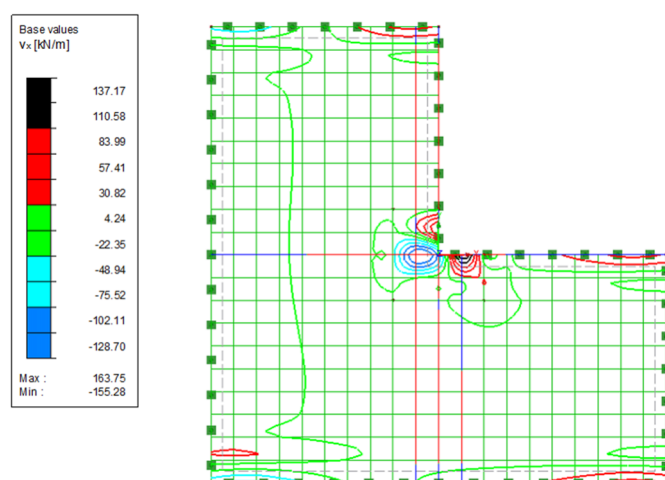
	R_z (kN)	Excentricitet (m)
mindlin 1,0x1,0	-118,4	0,172
mindlin 0,5x0,5	-91,3	-0,094
mindlin 0,25x0,25	-83,8	-0,129
mindlin 0,125x0,125	-82,4	-0,118

Kurvorna 0,25 och 0,125 ger ungefär samma resultat.

Till hörnet gränsar två stödlinjer varför reaktionen fördubblas.

Kraftresultanten är alltså ca $2 \cdot 83 = 166$ kN med en (snedriktad) excentricitet om ca $-0,12/\sqrt{2} = -0,08$ m.

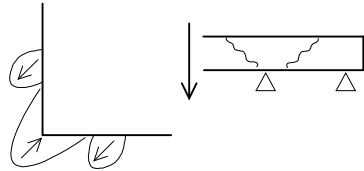
Tvärkraftsplan för v_x , se Figur 4.5.1.4. Motsvarande plan för v_y blir densamma, speglad kring diagonalen $y = x$.



Figur 4.5.1.4 Tvärkraftsplan v_x , bärring i riktning mot vänstra upplaget räknas som positiv, mindlinelement 0,5 x 0,5 m.

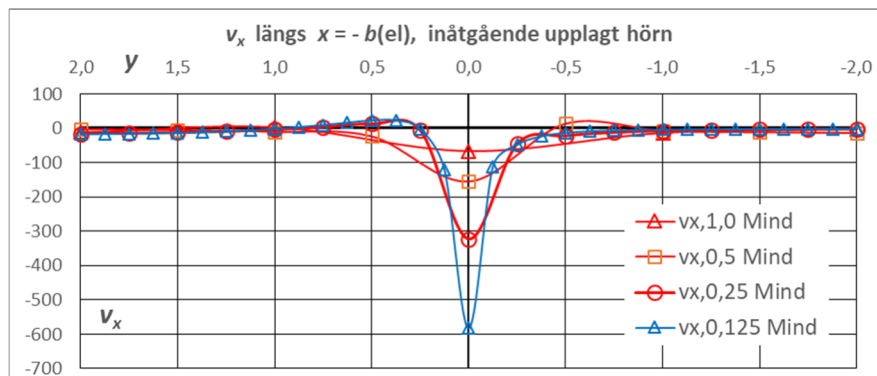
I första hand ser vi här de negativa tvärkrafterna till vänster om det inre hörnet och vi har för v_y en motsvarighet under hörnet.

Om plattan vore löst upplagd längs kanterna skulle den fjädra uppåt strax till höger om samt ovanför hörnet. Förankringen i stödlinjen är orsaken till de positiva tvärkrafterna där som framgår av tvärkraftsplanen för v_x (Figur 4.5.1.4). Tvärkraftssymbolen i det inre hörnet i huvudtvärkraftsplanen Figur 4.5.1.2 ovan innebär en bärningsriktning snett uppåt åt höger men i punkterna strax intill (till höger om resp ovanför) är bärningsriktningen omkastad. I figuren nedan illustreras tendensen till skjuvsprickor intill hörnet där pilarna är riktade nedåt i skjuvsprickan. Man kan spåra en likhet med balken i figuren.



Figur 4.5.1.5 Tendens till skjuvsprickor nära hörn.

Av Figur 4.5.1.6 framgår tvärkraften v_x längs snitt $x = -b_{el}$, d v s $x = -1,0$, $-0,5$, $-0,25$ resp $-0,125$ m. Snitten är tagna genom toppvärdena.



Figur 4.5.1.6 Tvärkraft v_x (kN/m) längs $x = -b_{el}$.

4.5.2 Elastiskt upplag

En anpassning till verkliga förhållanden är ofta att införa elastiska upplag, vilket har fördelen att spänningstoppar reduceras.

I plattmodellen infördes två tunna och i botten understödda väggar med höjd 3,0 m och en styvhet motsvarande tjockleken 0,3 m. Gångjärnsleder infördes upptill i anslutningen till plattan. Mindlinelement $0,125 \times 0,125$ m, $h = 0,4$ m och $q = 10$ kN/m².

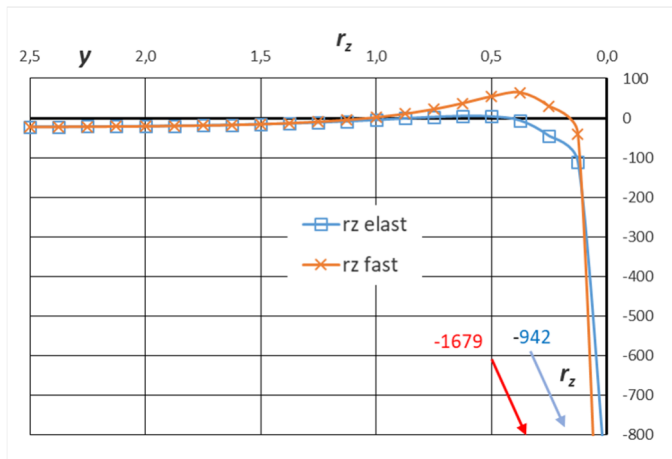
Som upplagsreaktion används vertikalkraften (kN/m) i ett väggsnitt i nivå $z = -0,0$ m.

Jämförelse sker med en likadan modell med fasta upplag, d v s utan väggar, Sektion 4.5.1.

Upplagsreaktionen längs linjeupplaget $x = 0$ visas i Figur 4.5.2.1. Den högra ändpunkten $y = 0$ är linjeupplagets ände i modellen.

Vid fast upplag uppkommer vertikala dragkrafter inom intervallet $0,25 < y < 1,0$ m.

Vid elastiskt upplag blir toppvärdet kraftigt reducerat och reaktionen utjämnad.



Figur 4.5.2.1 Upplagsreaktion längs den ena stödlinjen vid inre hörn.

Summa upplagsreaktion vid stödande från $y = 0$ till 1,0 m beräknas (räknat med stapeldiagram).

Tabell 4.5.2.1 Upplagsreaktion inom 1,0 m.

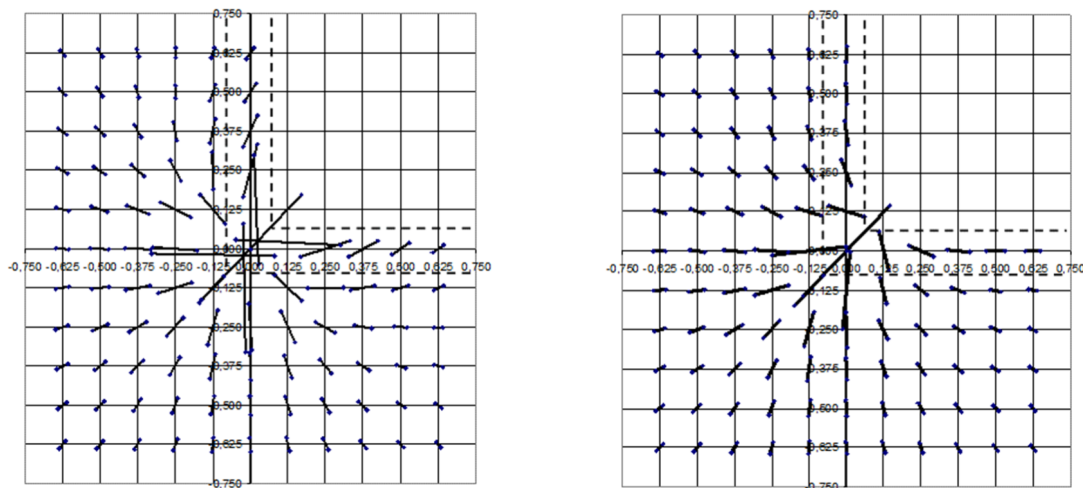
	R_z (kN)	Excentricitet (m)
Fast upplag	-82,4	-0,118
Elastiskt upplag	-78,0	0,060

Till hörnet gränsar två stödlinjer varför reaktionen fördubblas.

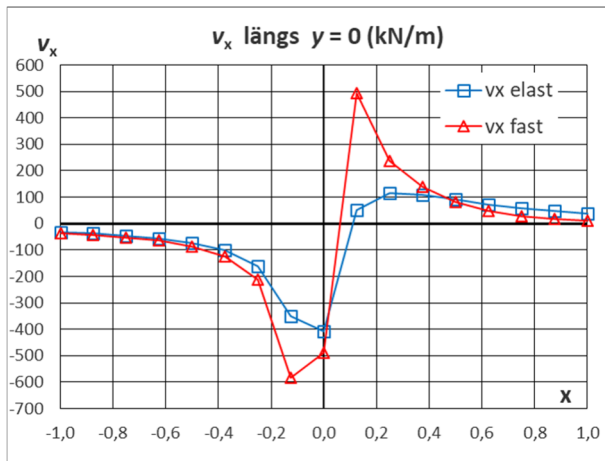
Huvudtvärkrafterna i och kring det inre hörnet åskådliggörs av Figur 4.5.2.2. Tvärkraftsymbolerna i figurerna visar huvudtvärkraftens storlek och orientering, men inte bärningsriktningen (av två möjliga). Som regel kan tolkningen utföras utan svårighet.

Vid fast upplag (Figur a) varierar bärningsriktningen markant invid hörnet) varför Figur 4.5.2.3 medtagits som visar höga toppvärden och teckenväxling vid hörnet. (Teckenväxlingen kan inte utläsas ur Figur 4.5.2.2a.) Jämför med resonemang i Sektion 4.5.1.

Vid elastiskt upplag dämpas variationerna betydligt.

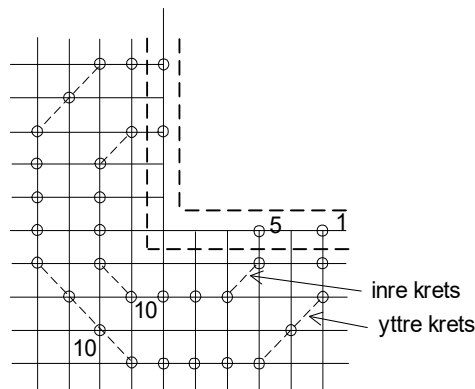


Figur 4.5.2.2a och b Huvudtvärkrafter kring det inre hörnet, till vänster fast upplag och till höger elastiskt upplag, samma skala. (Några av tvärkraftssymbolerna är något sidoförskjutna för tydlighets skull.)

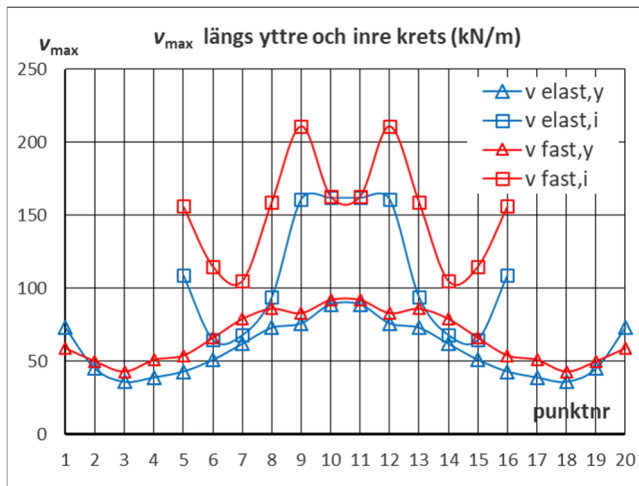


Figur 4.5.2.3 v_x längs stödlinjen och ut i fält (åt vänster).

Huvudtvärkraften kring det inre hörnet visas längs en yttre och en inre krets runt hörnet i Figur 4.5.2.4 och 4.5.2.5. Punktnumreringen är medsols utgående från högra ändpunkten i planfiguren.



Figur 4.5.2.4 Redovisningspunkter för huvudtvärkraft runt inre hörn, rutnät 0,125 m.



Figur 4.5.2.5 Huvudtvärkraft längs yttre och inre krets.

Med hänsyn till en tänkt stansspricka är tvärkraften på avståndet $h/2$ från stödet intressant. Ett sådant snitt illustreras av kurvorna för inre krets ovan.

Man bör ha minst två element mellan studerat snitt och upplag. Av denna anledning har den fina elementstorleken 0,125 m tillämpats. Hörnet är, även med elastiskt upplag, en singular punkt.

Resultat:

Elasticiteten hos stödlinjen bör ingå i beräkningsmodellen eftersom detta är en anpassning till verkligheten som ger märkbar inverkan på upplagsreaktionens fördelning. Reaktion med omvänt tecken (vertikal dragkraft) uteblir i detta fall och tvärkraften runt stödänden reduceras betydligt.

Genomstansningslasten vid elastiskt stöd kan i detta fall bestämmas såsom summa upplagsreaktion inom ca 0,5 m längd invid stödänden (jämför Figur 4.5.2.1 ovan). Totalt för båda stödlinjerna fördubblas värdet.

Kretsarna ovan ligger inom en tänkt stansspricka med avsikten att påvisa variationer i tvärkraftsfördelningen. Det visar sig att variationen är påtaglig i detta fall (Figur 4.5.2.5).

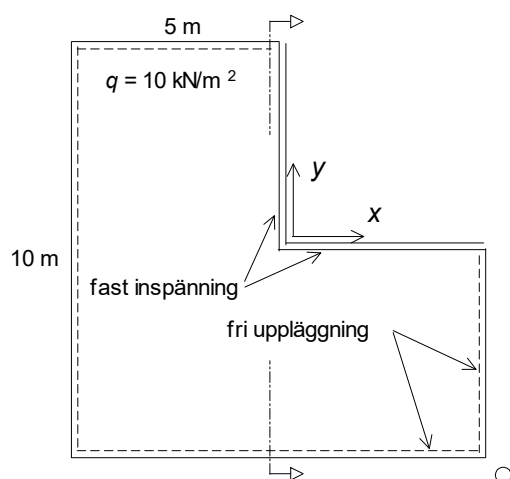
Anm. Endast den övre delen av den stödjande väggen bidrar till lastfördelningen i detta fall med fri (ledad) uppläggning, se Sektion 4.4.4.

4.6 Inåtgående inspänt hörn

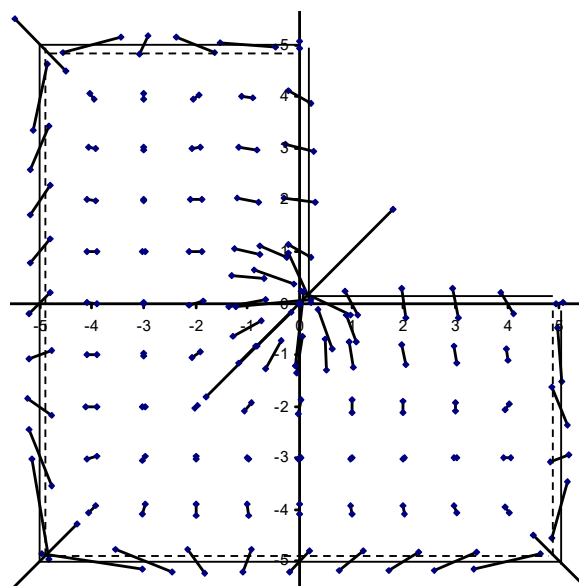
4.6.1 Fast inspänt upplag

En platta 10x10 m enligt Figur 4.6.1.1 har beräknats med kvadratiska mindlinelement med sidmått 1,0, 0,5, 0,25 och 0,125 m. $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 10$ kN/m². I det inre hörnet ansluter två fast inspända (och upplagda) kanter. Detta är samma platta som i Sektion 3.6.

Det inre hörnet i $x/y = 0/0$ med omgivning studeras. Där erhålls en hög upplagsreaktion. Detta är en singular punkt där plattans moment och tvärkrafter växer obegränsat vid finare elementindelning.



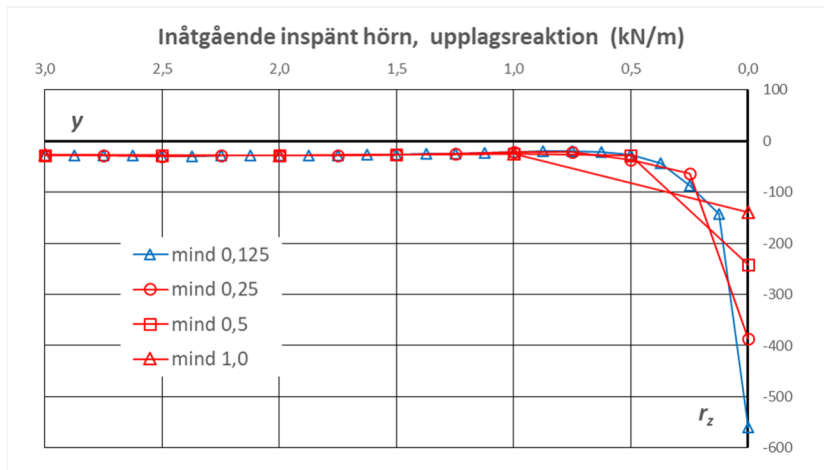
Figur 4.6.1.1 Studerad platta.



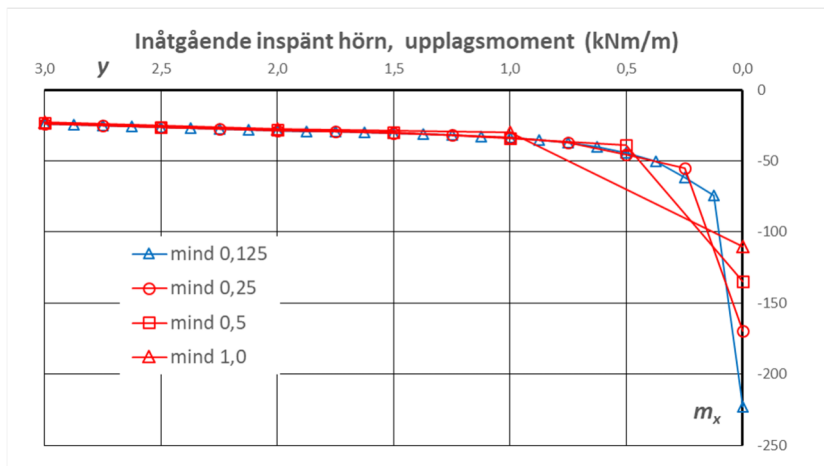
Figur 4.6.1.2 Huvudtvärkrafter, mindlinelement 0,25x0,25 m, gles redovisning.

Längs fritt upplagda kanter är tvärkraftens komponent vinkelrätt kanten lika med upplagsreaktionen och komponent parallellt med kanten lika med kanttillskottet (m_{xy}), se Sektion 2.1.

Upplagsreaktionerna r_z och m_x längs upplaget $x = 0$ fram till det inre hörnet i $y = 0$ visas i Figur 4.6.1.3 och 4.6.1.4.

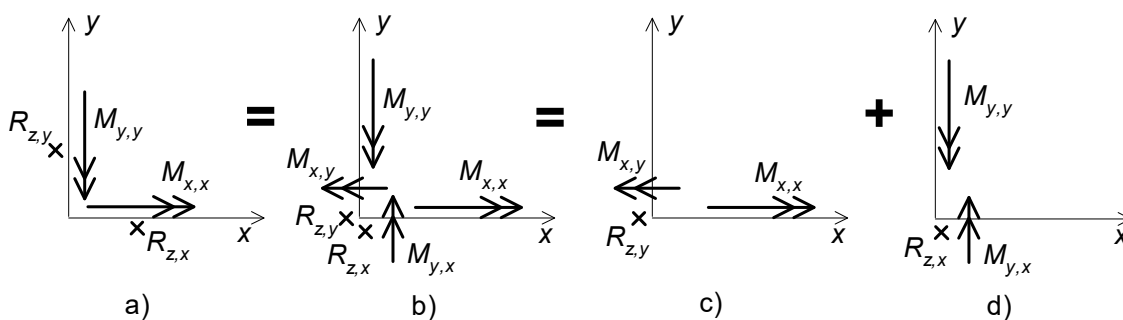


Figur 4.6.1.3 Upplagsreaktion längs del av upplagslinje vid inre hörn.



Figur 4.6.1.4 Upplagsmoment längs del av upplagslinje vid inre hörn.

Utgående från upplagsreaktionsfördelningen beräknas upplagskraft och kraftexcentricitet inom 1,0 m. Beräkningen sker med stapeldiagram med stapelbredd = b_{el} (elementbredden), dock i intervallets ändar $b_{el}/2$ med kraften placerad i stapelns tyngdpunkt.



Figur 4.6.1.5 Krafter i och intill hörn. Vektorerna visar aktuella riktningar verkande på stöden, ej positiva riktningar.

I figuren ovan är a) stödpåverkan enligt FEM-resultaten, i Figur b) har kraften flyttats till origo och Figur c) visar vad som ingår i den följande beräkningen av delexcentriciteten e i y -led. Figur d) ger på samma sätt delexcentriciteten e i x -led och den sammantagna excentriciteten blir $e/\sqrt{2}$ räknat från origo längs diagonalen $y = x$. ($m_{x,x}$ är lika med $m_{y,y}$ med omvänt tecken.)

Tabell 4.6.1.1 Upplagsreaktion inom 1,0 m.

	R_z (kN)	$M_{x,y}$ (kNm)	$M_{x,x}$ (kNm)	ger excentricitet kring $y=0$ (m)
mindlin 1,0x1,0	-82,2	-29,9	70,1	-0,49
mindlin 0,5x0,5	-81,2	-21,0	61,8	-0,50
mindlin 0,25x0,25	-81,5	-18,3	59,8	-0,51
mindlin 0,125x0,125	-81,5	-16,8	58,9	-0,52

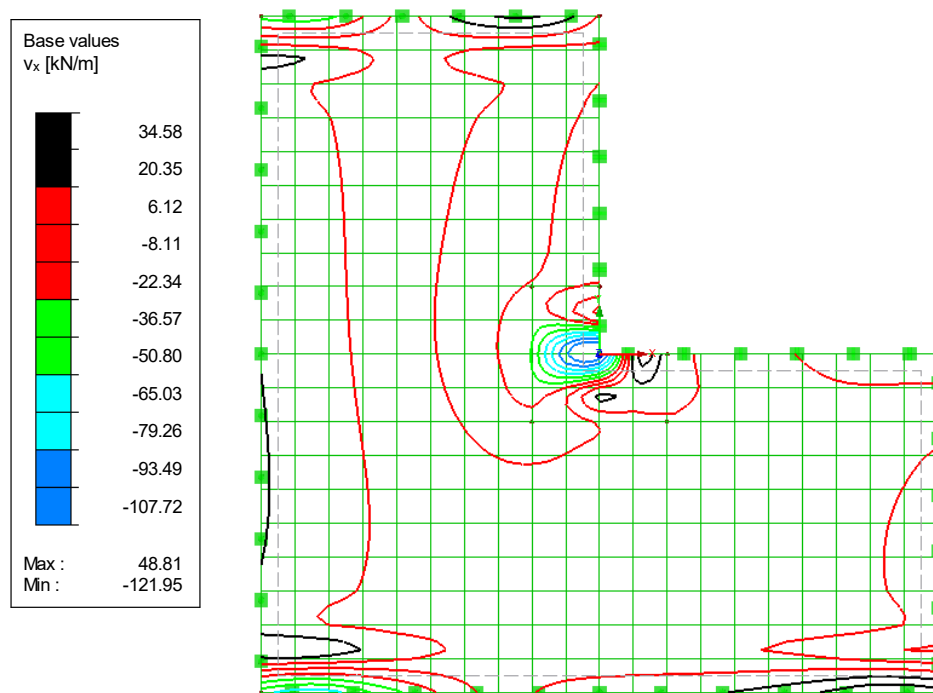
Man får ungefär samma resultat med elementmått 0,125 till 0,5 m, vilket innebär att man i ett praktiskt fall har en viss frihet i valet av elementstorlek.

Till hörnet gränsar två stödlinjer varför reaktionen fördubblas.

Kraftresultanten är alltså ca $2 \cdot 81,5 = 163$ kN och dess excentricitet är ca $0,51 / \sqrt{2} = 0,36$ m från origo längs diagonalen $y = x$ snett nedåt i planfiguren.

Jämfört med den tidigare studerade plattan med inåtgående upplagt hörn blev här kraftresultanten ungefär densamma men med en tydlig excentricitet.

Tvärkraftsplan för v_x , se Figur 4.6.1.6. Motsvarande plan för v_y blir densamma, speglad kring diagonalen $y = x$.

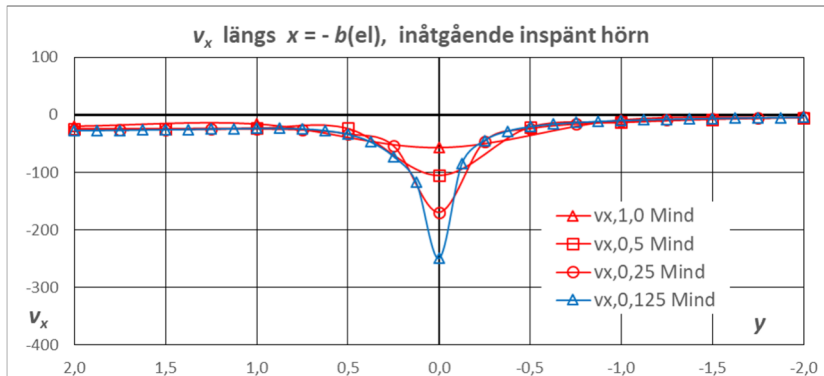


Figur 4.6.1.6 Tvärkraftsplan v_x , bärning i riktning mot vänstra upplaget räknas som positiv, mindlinelement 0,5 x 0,5 m.

I första hand ser vi här de negativa tvärkrafterna till vänster om det inre hörnet och vi har för v_y en motsvarighet under hörnet.

Tvärkraften v_x teckenväxlar till höger om hörnet. Jämför med resonemang i Sektion 4.5.1.

Av Figur 4.6.1.7 framgår tvärkraften v_x längs snitt $x = -b_{el}$, d v s $x = -1,0$, $-0,5$, $-0,25$ resp $-0,125$ m. (Toppvärdena är här något lägre än i upplagslinjen.)



Figur 4.6.1.7 Tvärkraft v_x (kN/m) längs $x = -b_{el}$.

4.6.2 Elastiskt inspänt upplag

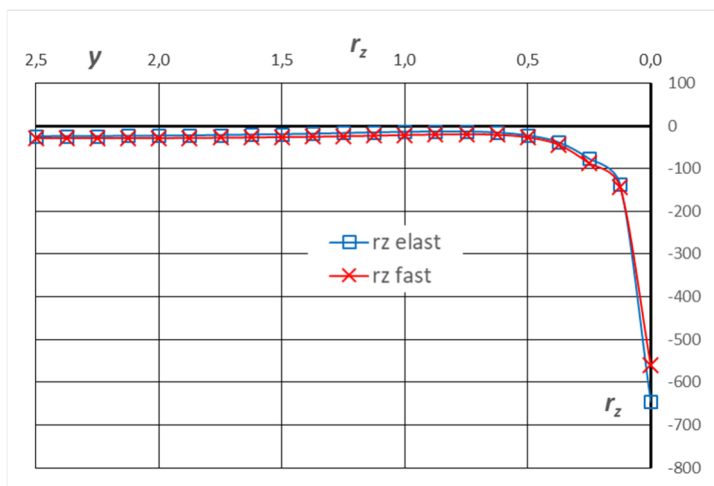
En anpassning till verkliga förhållanden är ofta att införa elastiska upplag, vilket har fördelen att spänningstoppar reduceras.

I plattmodellen infördes två tunna och i botten understödda väggar med höjd 3,0 m och en styvhet motsvarande tjockleken 0,3 m. Anslutningen till plattan var fast. Mindlinelement 0,125x0,125 m, $h = 0,4$ m och $q = 10$ kN/m².

Som upplagsreaktion används vertikalkraften (kN/m) i ett väggsnitt i nivå $z = -0,0$ m.

Jämförelse sker med en likadan modell med fast inspända upplag, d v s utan väggar, Sektion 4.6.1.

Upplagsreaktionen längs linjeupplaget $x = 0$ visas i Figur 4.6.2.1. Den högra ändpunkten $y = 0$ är linjeupplagets ände i modellen.



Figur 4.6.2.1 Upplagsreaktion längs del av den ena stödlinjen vid inre hörn.

Upplagsreaktionens fördelning är praktiskt taget lika. Summa upplagsreaktion vid stödande är i den ena stödlinjen (räknat med stapeldiagram):

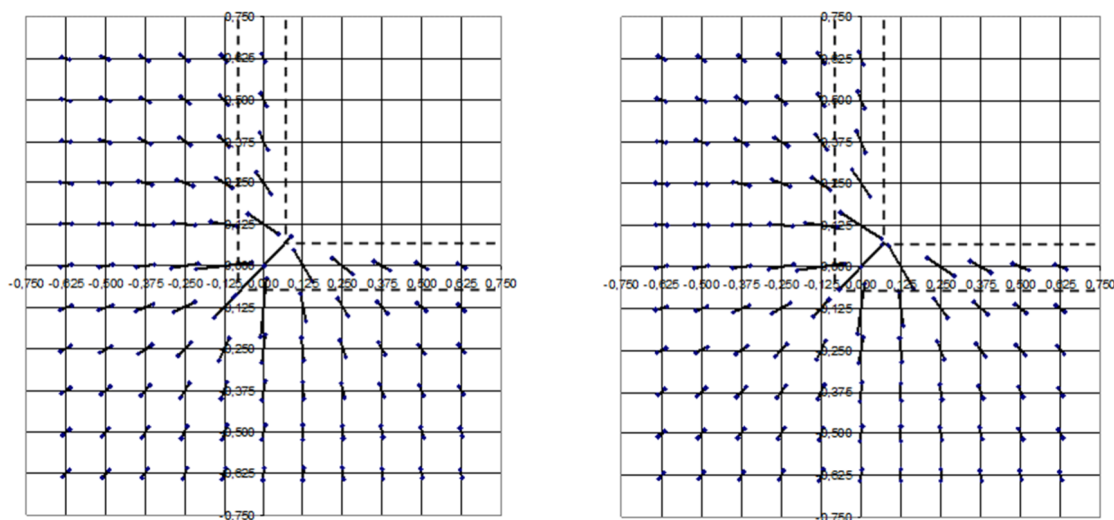
Tabell 4.6.2.1 Upplagsreaktion inom 1,0 m.

	R_z (kN)
Fast upplag	-81,5
Elastiskt upplag	-80,6

Skillnaden är obetydlig. Jämför med Sektion 4.4.4 och 4.5.2 ovan där skillnaden är stor mellan elastiskt och fast upplag.

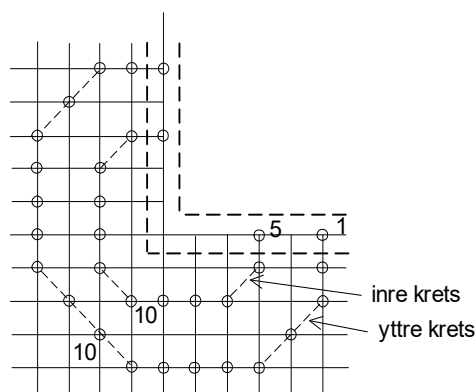
Till hörnet gränsar två stödlinjer varför reaktionen fördubblas.

Huvudtvärkraften kring det inre hörnet åskådliggörs av Figur 4.6.2.2. Resultaten är nästan lika.



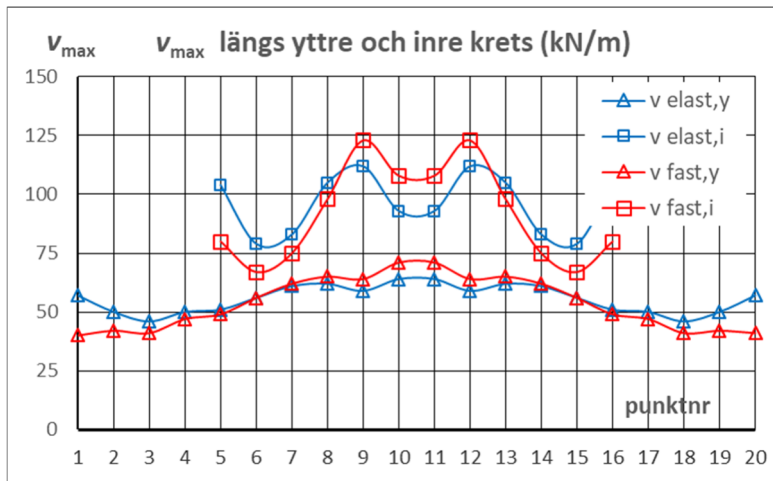
Figur 4.6.2.2a och b Huvudtvärkrafter kring det inre hörnet, till vänster fast inspänt upplag och till höger elastiskt inspänt upplag, samma skala.

Huvudtvärkraften kring det inre hörnet visas längs en yttre och en inre krets runt hörnet i Figur 4.6.2.3 och 4.6.2.4. Punktnummereringen är medsols utgående från högra ändpunkten i planfiguren.



Figur 4.6.2.3 Redovisningspunkter för huvudtvärkraft runt inre hörn, rutnät 0,125 m.

Med hänsyn till en tänkt stansspricka är tvärkraften på avståndet $h/2$ från stödet intressant. Ett sådant snitt illustreras av kurvorna för inre krets nedan.



Figur 4.6.2.4 Huvudtvärkraft längs yttre och inre krets.

Man bör ha minst två element mellan studerat snitt och upplag. Av denna anledning har den fina elementstorleken 0,125 m tillämpats. Hörnet är, även med elastiskt upplag, en singular punkt.

Resultat:

Upplagsreaktionen och tvärkraftsfördelningen blir här ungefär lika vid elastiskt och fast inspänt stöd. (Detta var inte fallet i tidigare studerade plattor i Sektion 4.4.4 och 4.5.2.)

Elasticiteten hos stödlinjen bör dock ingå i beräkningsmodellen eftersom detta är en anpassning till verkligheten som ger stor inverkan på inspänningsmomenten, se Sektion 3.6.2.

Genomstansningslasten kan i detta fall bestämmas såsom summa upplagsreaktion inom 0,5 m längd invid stödändan (jämför Figur 4.6.2.1). Totalt för båda stödlinjerna fördubblas värdet.

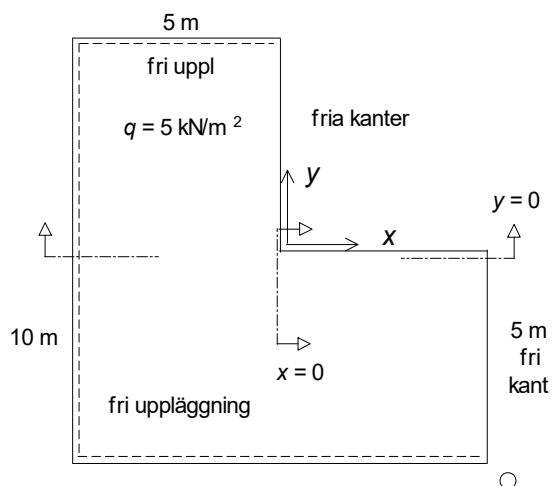
Kretsarna ovan ligger inom en tänkt stansspricka med avsikten att påvisa variationer i tvärkraftsfördelningen. Det visar sig att variationen längs kretsarna är måttlig i detta fall (Figur 4.6.2.4).

4.7 Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk

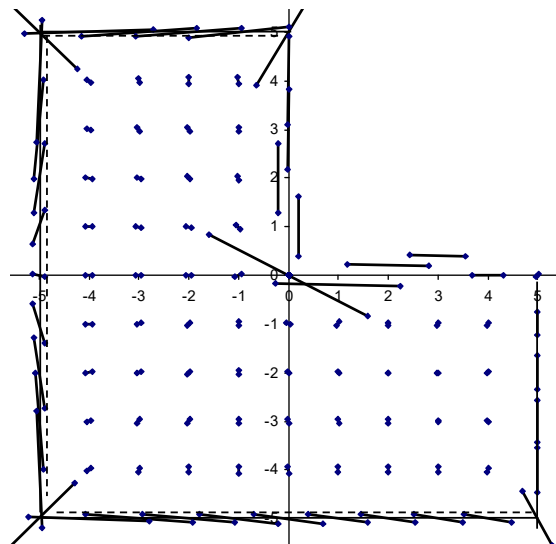
En platta 10 x 10 m med ett inåtgående hörn och med tre fritt upplagda kanter samt med tre fria (ej understödda) kanter har beräknats med kvadratiska mindlin- och kirchoffelement med olika storlekar: 1,0, 0,5, 0,25, och 0,125 m (mindlin) resp 0,25 m (kirchoff). $h = 0,4$ m, $\nu = 0$, $q = 5$ kN/m². Detta är samma platta vars kant i snitt $x = 2,0$ m studerades i Sektion 2.3. (Med benämningen "osymmetrisk" menas här osymmetri kring diagonalen $y = x$ vad gäller uppläggningsen, till skillnad från den liknande platta som studerades i Sektion 3.4. Anledningen till att denna variant valdes är att vi här får en markant upphängning i det inre hörnet av den högra tredjedelen av plattan.)

Längs fria kanter är tvärkraften lika med basvärde plus kanttillskott (m_{xy}), se Sektion 2.1. I detta fall dominerar den senare delen inom en liten bredd.

Längs upplagda kanter är tvärkraftens komposant vinkelrätt kanten lika med upplagsreaktionen och komposant parallellt med kanten lika med kanttillskottet (m_{xy}).

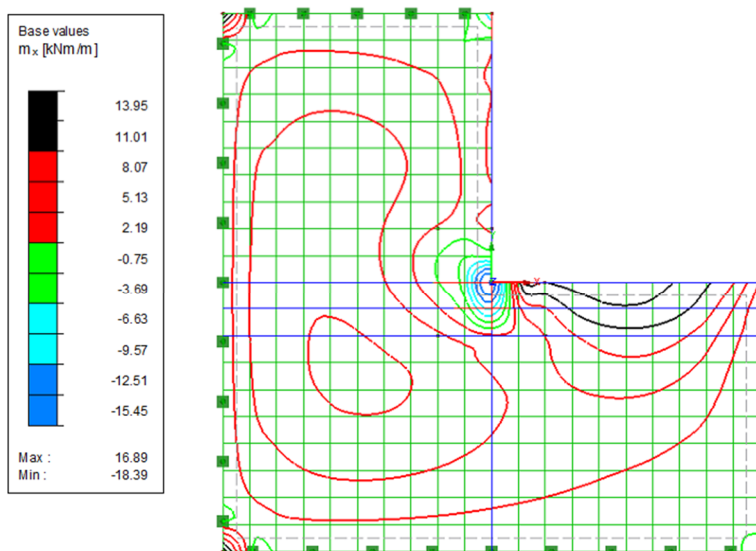


Figur 4.7.1 Studerad platta.

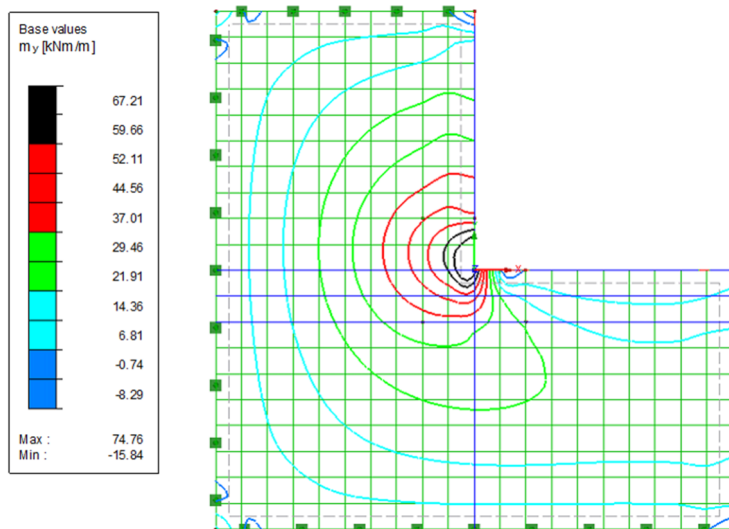


Figur 4.7.2 Huvudtvärkrafter, mindlinelement 0,25x0,25 m, gles redovisning, några av symbolerna har sidoförskjutits för tydlighets skull.

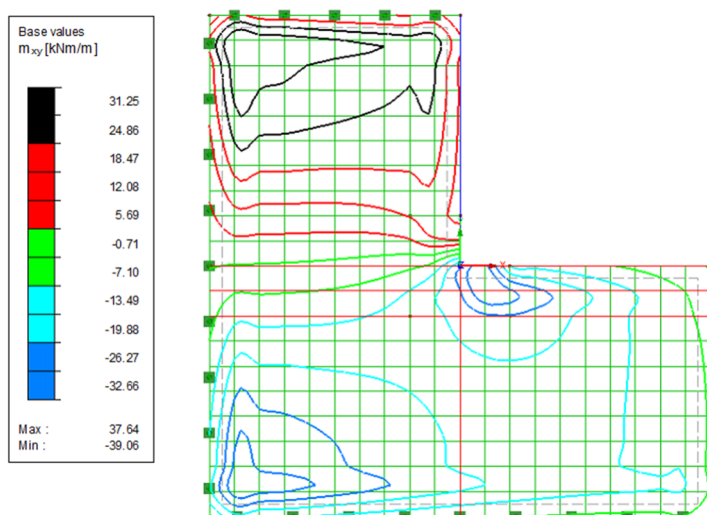
Denna platta behandlades inte i Kapitel 3 varför nedan såväl moment- som tvärkraftsplaner medtas.



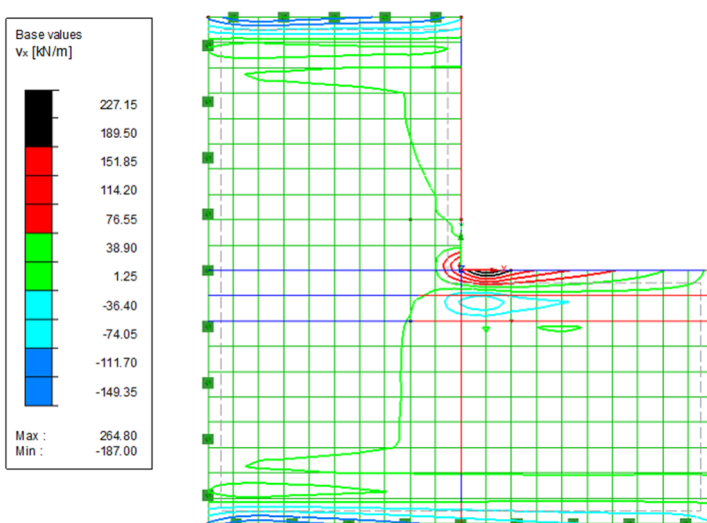
Figur 4.7.3 Momentplan m_x , mindlinelement 0,5x0,5 m. Obs negativa moment vid inre hörn.



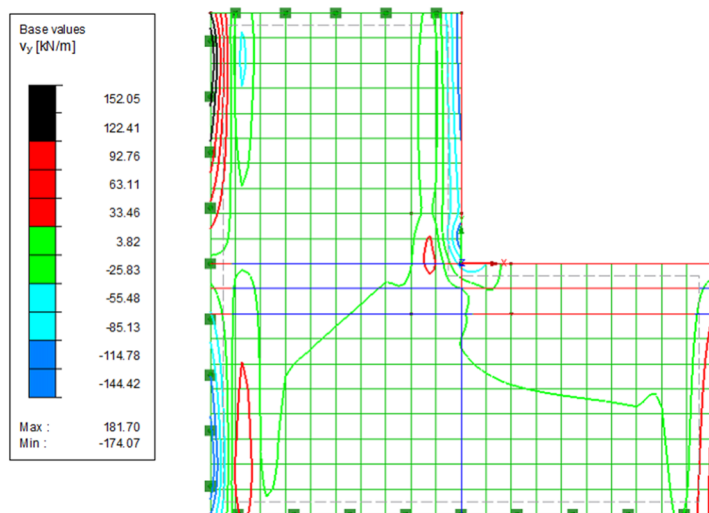
Figur 4.7.4 Momentplan m_y .



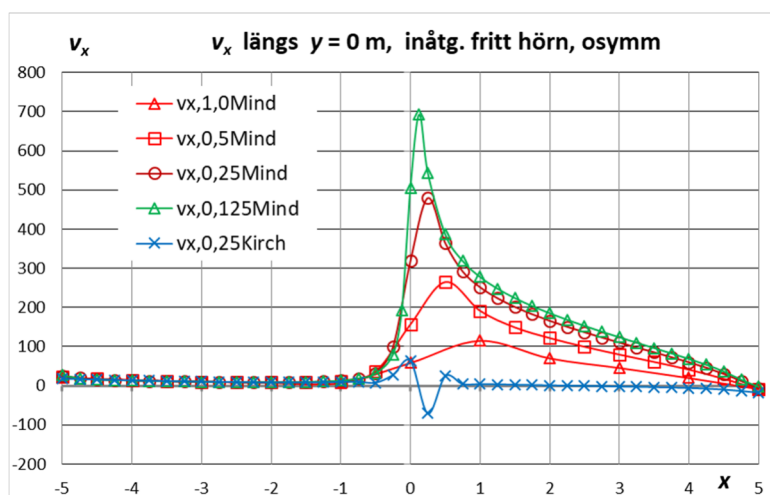
Figur 4.7.5 Momentplan m_{xy} .



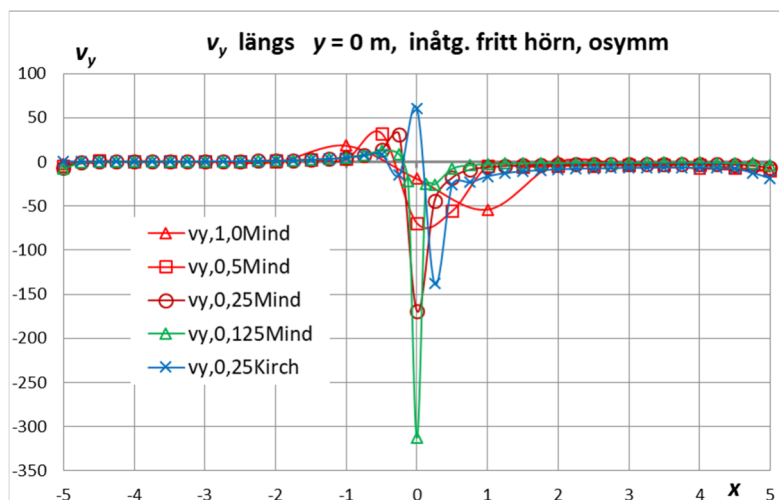
Figur 4.7.6 Tvärkraftsplan v_x . Fri kant vid hörn bär åt vänster (positiv).



Figur 4.7.7 Tvärkraftsplan v_y . Fri kant ovanför hörn bär uppåt i figuren (negativ). Den högra fria kanten bär nedåt i figuren (positiv).



Figur 4.7.8 Tvärkraft v_x (kN/m) längs $y = 0$ m (x-axeln).



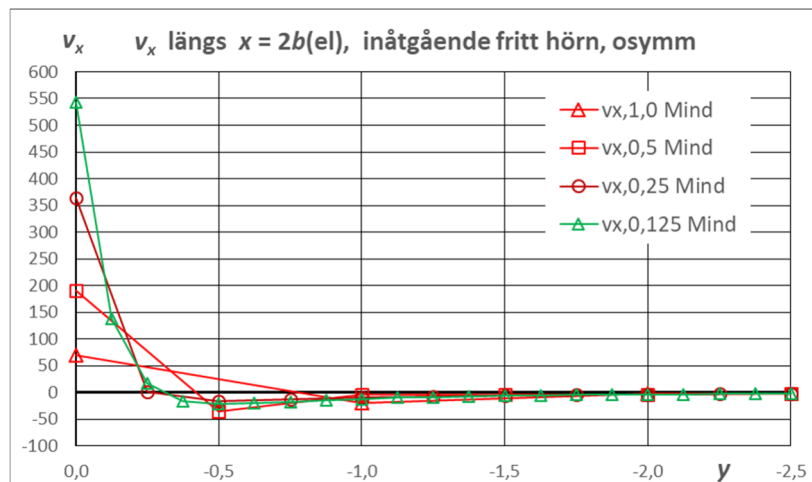
Figur 4.7.9 Tvärkraft v_y (kN/m) längs $y = 0$ (x-axeln). De lokala variationerna vid sidan om hörnet avtar vid finare elementindelning.

Ur de två diagrammen ovan för tvärkrafter framgår singulariteten i det inre hörnet. Toppvärdena med mindlinelement ökar (utan skönjbart gränsvärde) ju mindre elementen är. Den sneda huvudtvärkraften i hörnet 0/0 är (naturligtvis) större än v_x ovan i hörnet men i

detta exempel dock genomgående mindre än v_x i noden $b_{el} / 0$ strax intill, där b_{el} är elementbredden.

Vi skall studera strimlor i x -led utefter den fria kanten. I snittet $x = b_{el}$ nära inre hörn har vridmomentet vid kanten inte avtagit till små värden varför vi istället väljer snittet $x = 2b_{el}$ där vridmomentet vid kanten är betydligt mindre än i punkter längre in i plattan, se tabell nedan.

Studera v_x i snitt $x = 2b_{el}$, d v s $x = 1,0, 0,5$ och $0,25$ m med element $0,5, 0,25$ resp $0,125$ m.



Figur 4.7.10 Tvärkraft v_x (kN/m) längs $x = 2b_{el}$.

Tabell 4.7.1 Summa V_x i strimlor med bredden $0,5$ och $1,0$ m, snitt $x = 2b_{el}$, baserat på stapeldiagram.

	$V_{x,0,5}$ (kN)	$V_{x,1}$ (kN)	m_{xy} kNm/m vid fri kant	m_{xy} kNm/m 0,5 m från kant	m_{xy} kNm/m 1,0 m från kant
mind $0,5 \times 0,5$	39,1	29,3	-13,3	-33,5	-25,9
” $0,25 \times 0,25$	43,8	37,4	-10,2	-36,5	-26,5
” $0,125 \times 0,125$	50,0	41,4	-5,4	-37,1	-25,6

Basvärde. Tvärkraftens basvärde är i detta fall nära noll (se Figur 4.7.10 ovan, högra delen) och V_x är därför lika med kanttillskottet. (Ett fall med tydlig uppdelning i basvärde och kanttillskott behandlas i Sektion 2.4, se Figur 2.4.4.)

Lämplig elementstorlek. Lämplig elementstorlek är $0,125$ m eller mindre, d v s $h/3$ eller mindre. Kurvan för v_x är uttrycksfull. En elementstorlek $0,25$ m $\approx h/2$ är dock tillräckligt liten m h t tillförlitligheten hos de beräknade tvärkrafterna i snitt $x = 2b_{el}$ eftersom vridmomentet i kanten reducerats till högst ca en tredjedel, jämför Sektion 2.3.

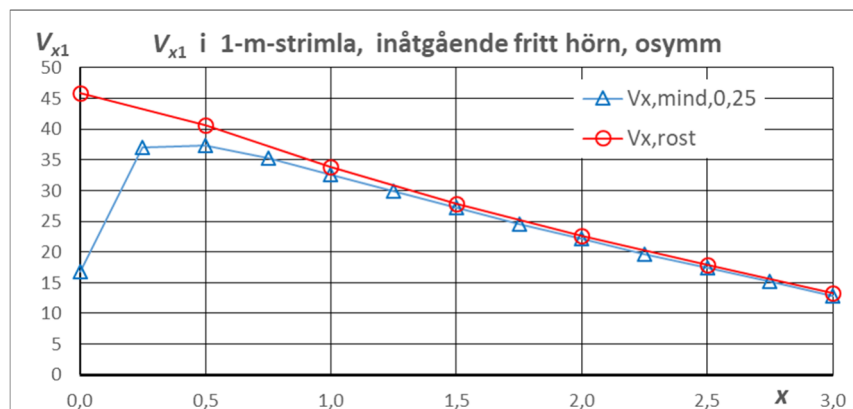
Vridmoment som kanttillskott. Ett alternativ är att sätta kanttillskottet lika med vridmomentet på visst avstånd från kanten där kantvariationen är knappt märkbar, exempelvis på ett avstånd lika med två elementbredder eller $1,0$ eller $2,0 \times$ plattjockleken. I detta fall $0,5$ m från kanten, se i tabellen. (Teckenändring skall ske eftersom negativt vridmoment i denna kant ger positiv tvärkraft i kanten.)

Snitt närmare hörnet. I snitt $x = b_{el}$, där toppvärdena för v_x ingår, erhöles $V_{x,1} = 28,6, 37,1$ resp $41,0$ kN, d v s ungefär samma värden som i $x = 2b_{el}$. De bedöms som osäkra eftersom

vridmomenten vid kanten inte avtagit till små värden. Värdena borde varit något större än dem i snittet $x = 2b_{el}$.

Kirchoffelement. En beräkning med kirchoffelement $0,25 \times 0,25$ m gav följande. Tvärkraftens kanttillskott kan normalt sättas lika med vridmomentet m_{xy} i den fria kanten. Detta var i snitt $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0$ m lika med $m_{xy} = -39,5, -72,3, -47,6, -38,4$ och $-33,9$ kNm/m. Värdena för $x = 0,75$ och $1,0$ är överensstämmande med V_x enligt mindlinresultaten medan värdena närmare hörnet är missvisande enligt jämförelse med beräkningarna med mindlinelement och med balkrost med anslutande extrapolering enligt nedan.

Extrapolering. Extrapolering till hörnet kan ske linjärt från $x = 0,5$ till $0,0$ m, jämför Figur 4.7.11 där $V_{x,1}$ i olika snitt enligt mindlin $0,25 \times 0,25$ jämförs med resultat av balkrostberäkning i Sektion C.6.



Figur 4.7.11 V_{x1} i 1-m-strimla, mindlin $0,25 \times 0,25$ jämfört med balkrost-beräkning (kN).

Resultat: En samlad bedömning är här att tvärkraften vid kanten är $V_{x,1} = 37,4$ kN (med element $0,25$). Extrapolering från snitten $x = 1,0$ ($V_{x,1} = 32,6$) och $x = 0,5$ m till det inre hörnet ger $V_{x,1} = 37,4 + (37,4 - 32,6) = 42,2$ kN.

Alternativt räknas med $0,5$ -m-strimla. Tvärkraften vid kanten är $V_{x,0,5} = 43,8$ kN (med element $0,25$). Extrapolering från snitten $x = 1,0$ ($V_{x,0,5} = 34,6$) och $x = 0,5$ m till det inre hörnet ger $V_{x,0,5} = 43,8 + (43,8 - 34,6) = 53,0$ kN.

Rekommendationen är att som kanttillskott räkna med det högre värdet, speciellt vid icke skjuvarmerad plattkant eftersom ett brottförlopp är sprött.

Jämför med *balkrostberäkningen* av denna platta i Sektion C.6. Balkbredden var $0,5$ m. I snittet $x = 0$ intill det inre hörnet blev i balkarna $y = -0,25, -0,75$ o s v tvärkraften $V_x = 51,0, -5,1, -5,0, -2,6, -1,3 \dots$ kN.

Då blir för balkrosten $V_{x,1} = 51,0 - 5,1 = 45,9$ kN, att jämföra med $42,2$ kN ovan. Respektive $V_{x,0,5} = 51,0$ kN att jämföra med $53,0$ kN ovan.

Skjuvarmeringsbehovet beräknas genom att applicera kanttillskottet V_{x1} på den effektiva bredden för vridning, som sätts lika med halva plattjockleken.

Nedan följer ett par jämviktskontroller.

Kontroll av momentjämvikten i snittet $x = b_{el}$ utförs. Momentet kring axeln $y = -5,0$ m av yttre last på den högra plattdelen är $M_{yt} = 5 \cdot (5 - b_{el}) \cdot 5 \cdot 2,5$ kNm. Moment M_{in} av inre v_x och m_{xy} beräknas utifrån stapeldiagram.

Tabell 4.7.2 Momentjämvikt i snittet $x = b_{el}$.

	M_{yt} (kNm)	$M_{in,vx} + M_{in,mxy} = M_{in}$ (kNm)	diff
mindlin 1,0x1,0	250,0	$106,3 + 97,4 = 203,7$	-18,5 %
” 0,5x0,5	281,25	$139,2 + 108,8 = 248,0$	-11,8 %
” 0,25x0,25	296,88	$165,0 + 112,7 = 277,7$	-6,5 %
” 0,125x0,125	304,69	$179,1 + 114,1 = 293,2$	-3,8 %
kirchoff 0,25x0,25	296,88	$-204,1 + 361,3 + 108,3 = 265,5$	-10,6 %

Anm: För kirchoffmodellen är den andra termen i M_{in} lika med momentet av det manuella tvärkraftstillskottet m_{xy} i kanten. Mindlintermerna $M_{in,vx}$ består på liknande sätt av en negativ del för sträckan $y = -0,25$ till $-5,0$ m (jämför Figur 4.7.6) samt en positiv övervägande del för värdet i den fria kanten.

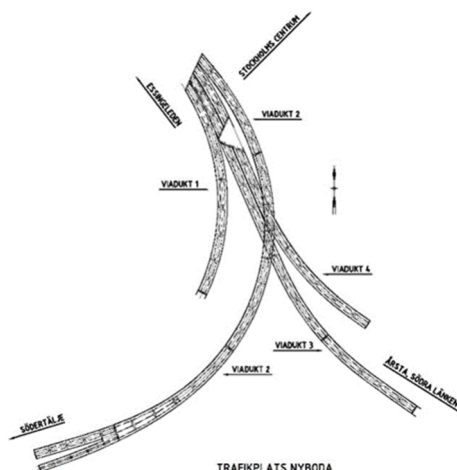
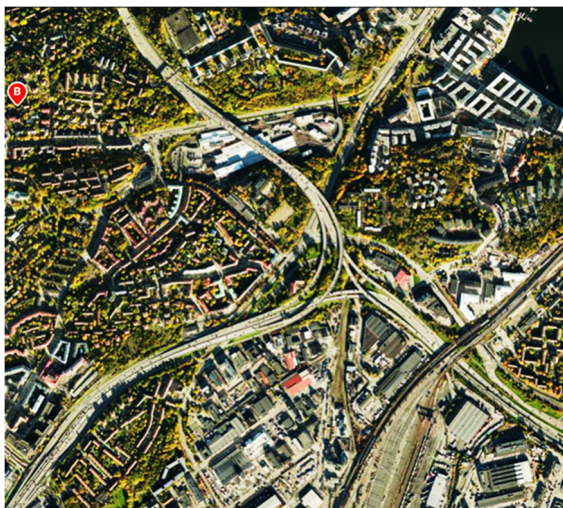
Tabell 4.7.3 Momentjämvikt i snittet $x = 1,0$ m.

	M_{yt} (kNm)	$M_{in,vx} + M_{in,mxy} = M_{in}$ (kNm)	diff
mindlin 1,0x1,0	250,0	$106,3 + 97,4 = 203,7$	-18,5 %
” 0,5x0,5	250,0	$136,7 + 99,2 = 235,9$	-5,6 %
” 0,25x0,25	250,0	$140,2 + 101,6 = 241,8$	-3,3 %
” 0,125x0,125	250,0	$143,6 + 102,5 = 246,1$	-1,6 %
kirchoff 0,25x0,25	250,0	$-18,3 + 169,4 + 100,6 = 251,7$	0,7 %

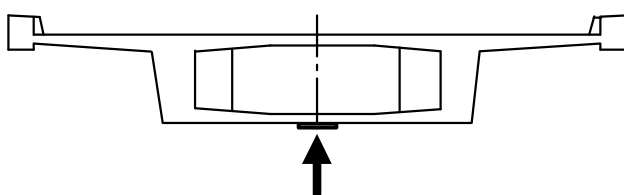
4.8 Skadefall, Tpl Nyboda

Detta kapitel har medtagits därför att det illustrerar en kritisk situation med anknytning till detta Kapitel 4 som avhjälpes med förspänning i brons tvärled. En klassningsberäkning påvisade otillräcklig bärförmåga m h t tvärkraft i tvärbalkar. Breda skjuvsprickor hade uppstått i snitt som nästan helt saknade skjuvarmering.

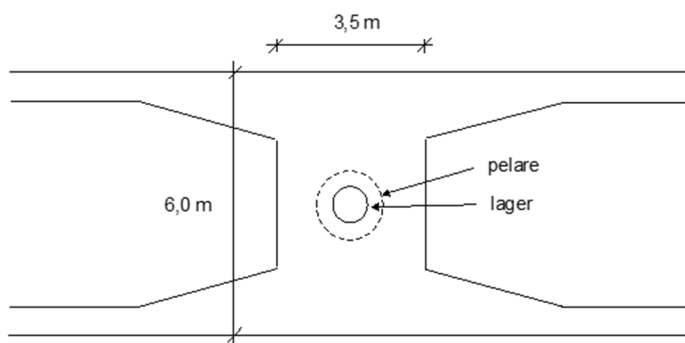
Trafikplatsen (Tpl Nyboda, Midsommarkransen, Stockholm) ingår i Essingeleden och byggdes under 1960-talet. Den utgörs av förspända krökta lådbalkar på centriska enpelarstöd som stabiliseras av skivpelare i vissa upplag. 70 st likartade spann med spännvidder kring 28 m är uppdelade i 10 st brodelar. Enpelarstöden har vipplager upptill och upplagskraften fördelas till huvudbalkarna via en inre tvärbalk som kan betraktas som ett mellanting mellan platta och balk. Tvärbalkarna är slakarmerade med upp till sex lager $\phi 16$ mm böjarmering i överkant men saknar skjuvarmering fränsett ytarmering i sidorna.



Figur 4.8.1a och b Trafikplats Nyboda.



Figur 4.8.2 Sektion.

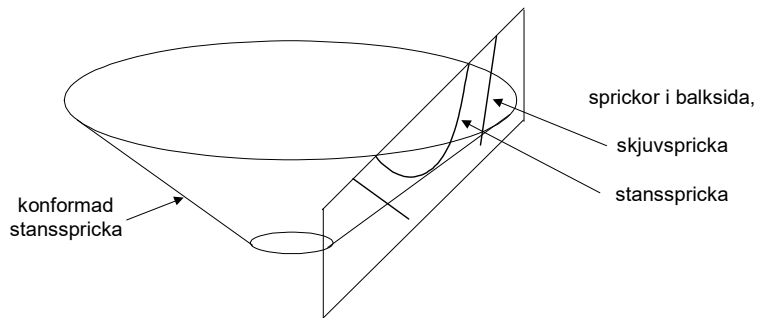


Figur 4.8.3 Plansektion vid tvärbalk på enpelarstöd.

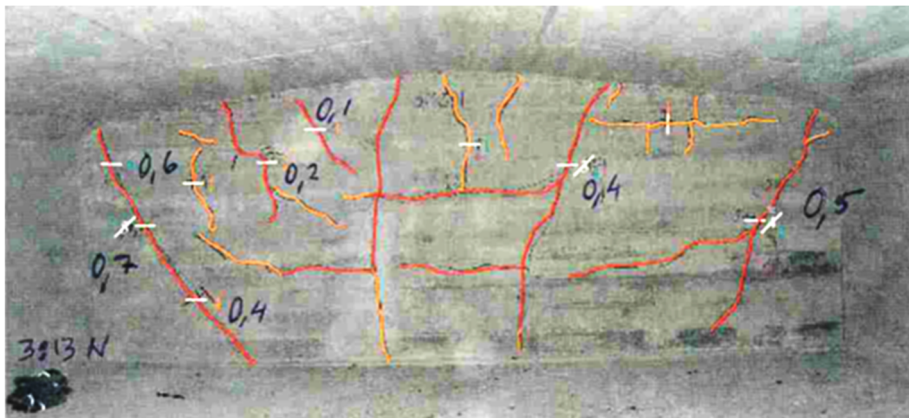
En klassningsberäkning år 2002 påvisade god bärförmåga hos den längsgående konstruktionen.

Kontrollberäkning år 2007 enligt norm BBK 04 (traditionell metod, additionsmodell) av tvärbalkarna vid enpelarstöden påvisade otillräcklig bärförmåga m h t tvärkrafter för den aktuella trafiklasten. (Stanskapaciteten var dock tillräcklig.)

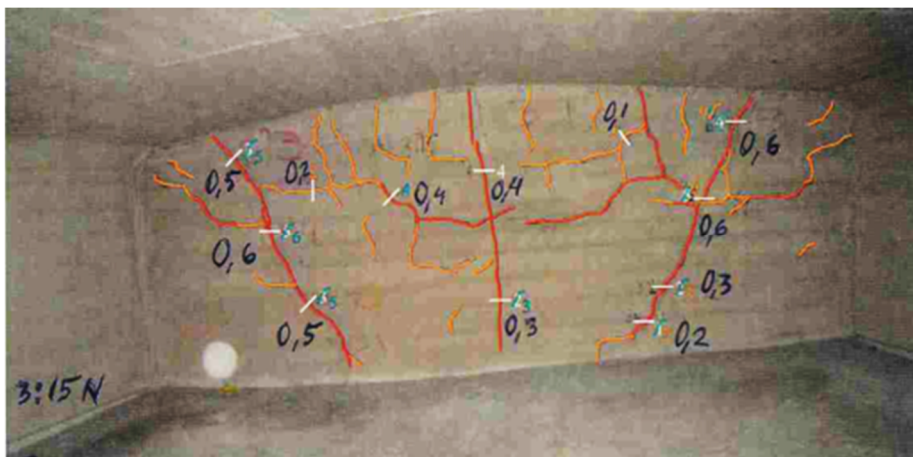
Uppsprickning av tvärbalkarnas sidor observerades i flertalet tvärbalkar. Där fanns skjuvsprickor med upp till 1,0 mm bredd i ytan (som var ytarmerad med $\phi 10$ s 300 mm) och sannolikt betydligt större bredd i balkens inre. Där fanns också krökta sprickor som kan tolkas som stanssprickor, se Figur 4.8.4.



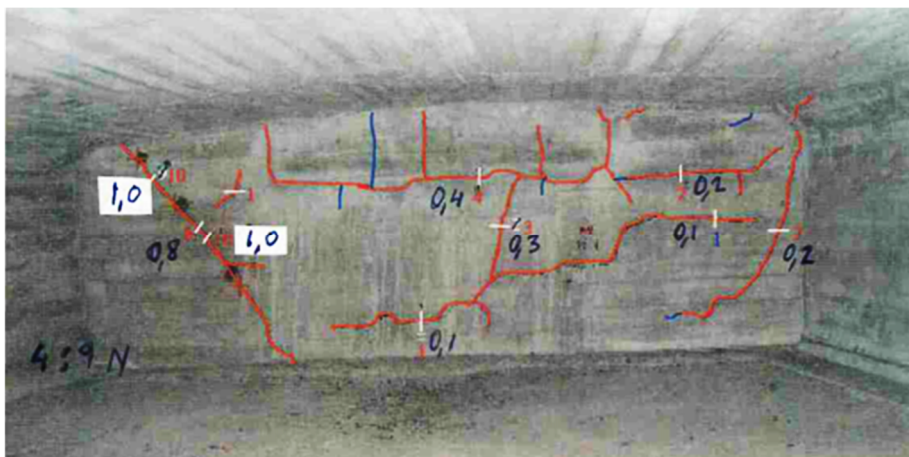
Figur 4.8.4 Sprickor i balksida.



Figur 4.8.5a Sprickbild tvärbalk 3.13 norra, sprickbredder i mm.



Figur 4.8.5b Sprickbild tvärbalk 3.15 norra.



Figur 4.8.5c Sprickbild tvärbalk 4.9 norra.



Figur 4.8.5d Sprickbild tvärbalk 4.14 norra.

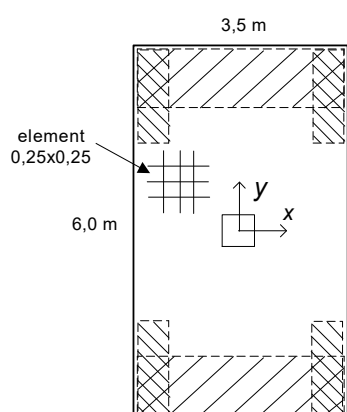
Spänningstillståndet i tvärbalken/plattan studeras här på det sätt som ovan gjorts i Kapitel 4 för olika plattor.

Tvärkraftens fördelning runt pelarstödet beräknas här med följande modell. En rektangulär platta 6,0 x 3,5 m med stöd i mitten belastas med totalt 1000 kN (godtyckligt valt)

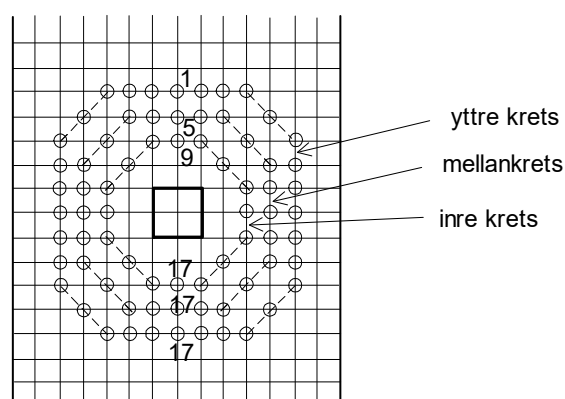
- 1) i hörnen med ytlaster (60%) inom 1,5 x 0,5 m,
- 2) längs kortsidorna med ytlaster (40%) inom 1,0 x 3,5 m, samt med
- 3) uppåtriktad lagerreaktion (100%) inom kvadrat 0,5x0,5 m

motsvarande 1) egenvikter jämte del av trafiklast resp 2) spännarmeringens vertikala avlämningskrafter jämte återstående del av trafiklast. Mindlinelement 0,25 x 0,25 m, $h = 1,5$ m. En upplagd och inspänd mittnod stabiliserar.

Böjmoment och horisontella normalkrafter av egenvikt, trafik och längsförspänning i modellens sidokanter är inte medtagna i modellen men detta torde inte påverka signifikansen hos de variationer i tvärfkraftsfördelningen kring pelarstödet vilka påvisas nedan, speciellt som tvärbalkens sidoytor i mittpartiet i stort sett är fria.

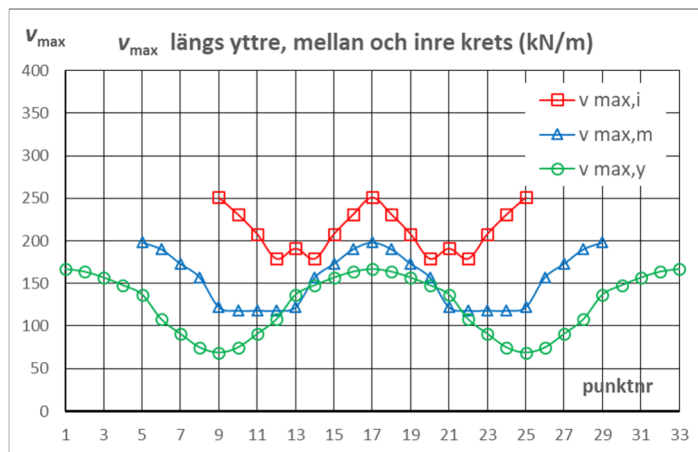


Figur 4.8.6 Beräkningsmodell, plan.



Figur 4.8.7 Redovisningspunkter för huvudtvärfkraft runt enpelarstöd.

I Figur 4.8.8 visas huvudtvärfkraft i nodpunkter, medsols utgående från övre mittpunkt i Figur 4.8.7.



Figur 4.8.8 Huvudtvärkraft i nodpunkter längs kretsar runt enpelarstöd.

Resultat:

Huvudtvärkraften runt stödet varierar påtagligt.

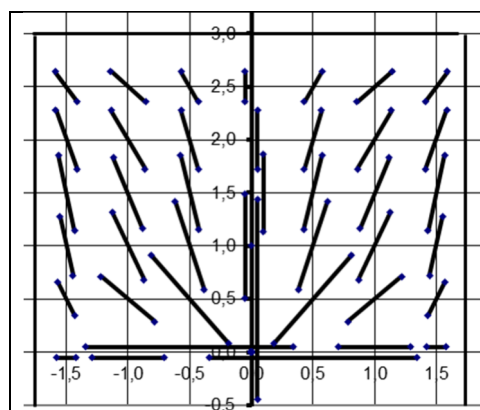
(Pelarreaktionen valdes lika med 1000 kN, godtyckligt. Verkliga reaktioner är betydligt större.)

Tabell 4.8.1 Huvudtvärkrafter i kretsar.

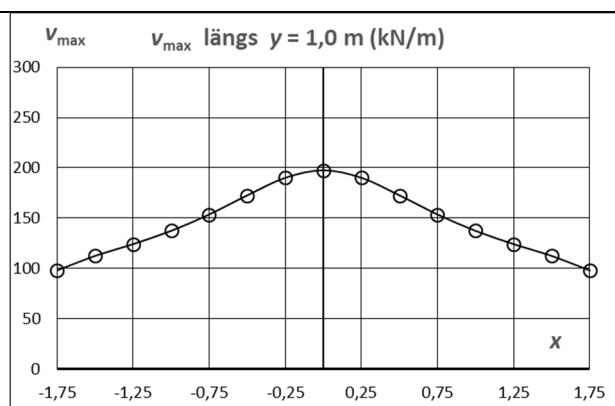
	kretslängd (m)	V integrerat (kN)	v_{\max} (kN/m)	v_{medel} (kN/m)	$v_{\max}/v_{\text{medel}}$
inre krets	4,80	1004	251	209	1,20
mellankrets	6,80	1040	198	153	1,30
yttre krets	8,80	1104	167	125	1,33

Anm. Istället för $v_{\max, \max}$ och $v_{\max, \text{medel}}$ skrivs v_{\max} resp v_{medel} . V integrerat har beräknats med hänsyn tagen till olika avstånd mellan noderna och blir något större än stödreaktionen eftersom v_{\max} i allmänhet inte är riktad vinkelrätt mot snittlinjen.

Planfiguren Figur 4.8.9 visar huvudtvärkrafter i halva plattan.



Figur 4.8.9 Huvudtvärkrafter i halva plattan, gles redovisning.



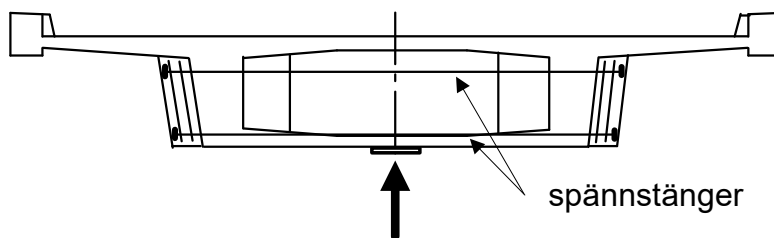
Figur 4.8.10 Huvudtvärkrafter längs snittet $y = 1,0$ m.

I snittet $y = 1,0$ m är huvudtvärkraften i mittpunkten dubbelt så stor som vid kanten.

Konstruktionen är ett mellanting mellan platta och balk. Utgående från skadefallet och resultaten ovan formuleras följande anvisningar för denna typ av geometri.

- 1) Dimensionera för genomstansning och beakta den ojämna huvudtvärkraftsfördelningen genom ett påslag på medeltvärkraften. Även vid centrisk lagerreaktion uppstår ojämn fördelning.
 - 2) Dimensionera också för tvärkraft i balk och beakta den ojämna huvudtvärkraftsfördelningen genom ett påslag på medeltvärkraften.
 - 3) Om skjuv/stansarmering fordras för del av beräkningssnitt skall den utsträckas inom hela snittet.
 - 4) Beakta vid tvärbalksdimensioneringen att excentrisk trafiklast orsakar *olika stora tvärkrafter* på ömse sidor om det ledade mittstödet. Tvärbalkens jämvikt tillfredställs genom horisontella krafter i plattorna. För exempelvis en punktlast över tvärbalkens högra ände (Figur 4.8.11) fördelar sig motsvarande upplagsreaktion med 75% åt höger och 25% åt vänster. Detta har behandlats i en separat studie av författaren.
 - 5) Beakta normregler om storleksfaktor, minimiskjuvarmering och upphängningsarmering.
- (Hur dimensioneringen ursprungligen utfördes har inte utretts. Man kan förmoda att man endast räknade med plattans genomstansning utan hänsyn till punkterna 1) till 5) ovan.)

47 st tvärbalkar förstärktes med horisontella förspända stänger och kompletterande upphängningsarmering. Inverkan av excentrisk trafiklast på tvärkraften i tvärbalkarna beaktades.



Figur 4.8.11 Förstärkning av 47 st tvärbalkar.



Figur 4.8.12 Förstärkning av tvärbalkar.

5 Sammanfattning och resultat

Analys och dimensionering av betongplattor utförs som regel utgående från FEM-beräkningar. För tolkning av beräkningsresultat och för att välja lämpliga kompletteringar har i denna utredning behandlats:

- moment i och kring singulära punkter (vid koncentrerade upplagsreaktioner samt vid inre fritt hörn),
- tvärkrafter kring koncentrerade upplagsreaktioner m a p genomstansning, och
- tvärkrafter längs fria kanter och i fritt inre hörn.

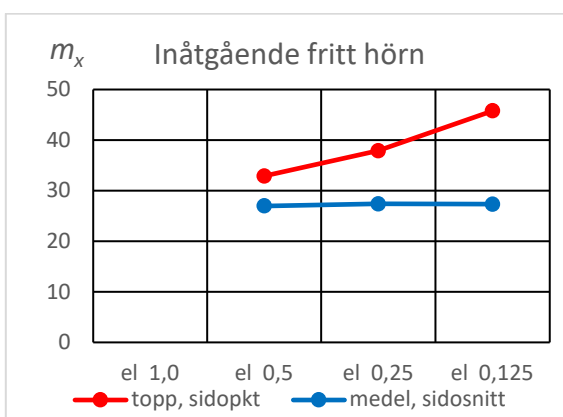
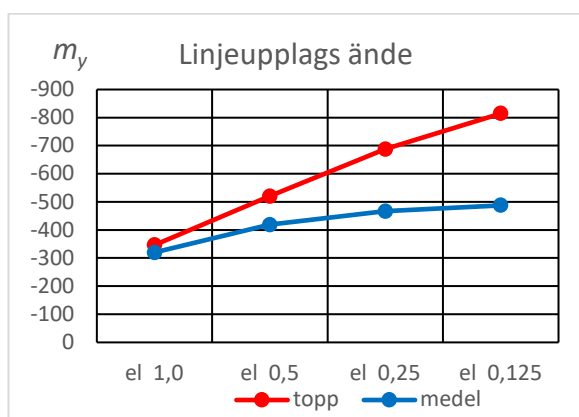
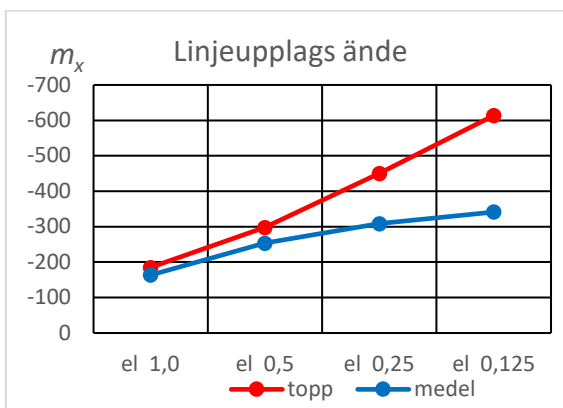
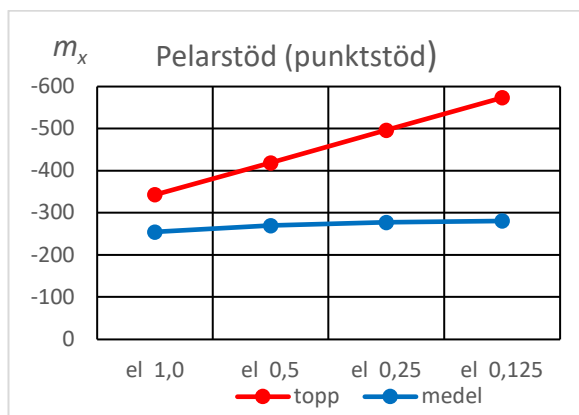
Exemplen belyser hur beräkningsresultaten påverkas vid variation av olika parametrar och tolkningen ger underlag för praktiskt konstruktionsarbete.

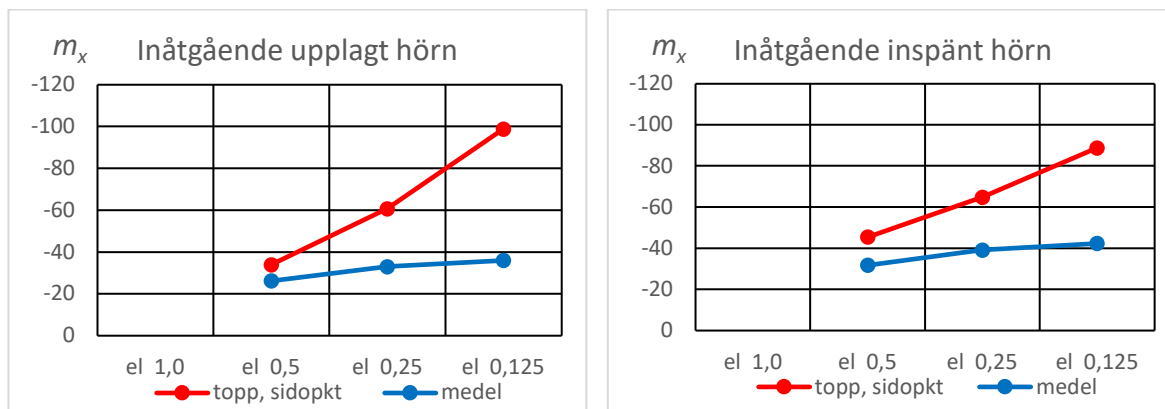
Plattor med pelarupplag, avslutat linjeupplag, olika typer av inåtgående hörn samt med fri kant har analyserats för jämnt fördelad belastning. Fasta, inspända, elastiska och fjädrande upplag har tillämpats. Inverkan av varierande stödväggshöjder och plattjocklekar har studerats. Mindlinelement 1,0x1,0, 0,5x0,5, 0,25x0,25 och 0,125x0,125 m har använts samt i några fall även kirchoffelement.

Singulariteter hos böjmoment har studerats i Kapitel 3.

Erhållna böjmoment vid olika elementstorlekar visas i nedanstående diagram. Toppmomenten (kNm/m) växer monotont vid halvering av elementstorleken medan medelmomenten inom en ”medverkande bredd” (t ex 2,0 eller 1,0 m) planar ut.

För inåtgående fritt hörn erhöles ungefär lika medelmoment med de olika elementstorlekarna.





Figur 5.1 a - f Toppmoment och medelmoment vid singulära punkter; elementbredd 1,0, 0,5, 0,25 och 0,125 m.

Det bör för en betongplatta vara en acceptabel bedömning att element med en bredd lika med plattjockleken väl avspeglar plattans funktion kring singulära punkter. Detta kan ernås med en lokal förfining av elementindelningen.

Inom en medverkande bredd kan momenten utjämnas till medelvärden. Detta motiveras av att böjstyvheten reduceras lokalt av betongens uppsprickning samt i brottgränstillstånd även av att armeringsspanningen uppnår sträckgränsen. Ett illustrerande exempel ges i Sektion 1.4.

Diagrammen Figur 5.1 ovan visar att momentutjämning inom en medverkande bredd, i princip enligt de blå kurvorna, gör att det dimensionerande momentet blir måttligt beroende av elementstorleken.

För pelarstöd och lageruppläggning kan hänsyn till stödytans storlek tas genom manuell justering av momenten i och kring den singulära punkten. Enkla formler för medelmoment och för toppmoment ges i Sektion 3.2.

Vid linjeupplags ände, inåtgående upplagt hörn och inåtgående inspönt hörn bör införas elastiska stöd exempelvis i form av stödjande väggar. Detta är en anpassning till verkliga förhållanden, varvid momentkurvor förskjuts och toppar kraftigt reduceras. Huvudmomenten i hörn förändras radikalt.

Olika vägghöjder har prövats. Vid fri uppläggning på vägg kan väggeometrin vid behov förenklas eftersom upplagsreaktionens fördelning huvudsakligen bestäms av väggens övre del.

Att införa fjäderförsedda upplagslinjer istället för vägg är inte rättvisande eftersom fjädrarna inte samverkar på det sätt som elementen i väggen gör.

Tvärkrafter kring singulära punkter har studerats i Kapitel 4.

Metod att beräkna bärförmågan m h t stansning framgår av normer. I Kapitel 4 behandlas följande tillhörande frågor:

- stödreaktion jämte excentricitet vid de olika plattgeometrierna,
- tilläggsfaktor för variation hos huvudtvärkraften runt stödet, samt
- inverkan av elastiska stöd.

Huvudtvärkrafter runt pelarstöd med centrisk och excentrisk stödreaktion studeras i Sektion 4.3.1. Jämförelse med Eurokod sker i ett exempel. Eurokodens uttryck för excentrisk reaktion förklaras i Sektion 4.2.

Olika elementstorlekar ger i de studerade plattorna praktiskt taget lika stödreaktioner. För utjämning av toppar bör mindlinelement tillämpas emedan då skjuvdeformationer medtas.

Vid linjeupplags ände och inåtgående upplagt hörn uppkommer vid fast uppläggning stor koncentrerad upplagsreaktion jämte vertikala dragkrafter vid sidan om. *Elastiska stöd* jämnar ut reaktionen och eliminerar dragkrafterna helt eller delvis. Huvudtvärkrafterna i en krets runt stöddanden resp hörnet reduceras betydligt. Elastiska stöd bör tillämpas eftersom de ger en anpassning till verkliga förhållanden.

Variationen hos huvudtvärkraften runt stödet är i flera fall påtaglig. Hänsyn till detta bör vid stansdimensionering tas genom en tilläggsfaktor. En beräkning av rätvinklig och snedvinklig broplatta (Sektion 4.3.2) visar att tvärkrafterna kan fördelas icke-rotationssymmetriskt även vid centriskt belastade (ledade) pelarstöd.

Tilläggsfaktorn bestäms av variationen hos huvudtvärkraften längs en krets på avståndet h eller $h/2$ från stödkanten. Detta kräver en fin elementindelning.

Inverkan av dubblerad plattjocklek och av alternativet kirchoffelement har studerats i några fall.

Inåtgående fritt hörn behandlades i Sektion 4.7. Där har vi ingen upplagsreaktion och stansningsberäkning är inte aktuell. En markant tvärkraft uppstår vid hörnet, som är en singular punkt. Tolkningen utfördes genom extrapolering från ett snitt på visst avstånd från hörnet. En beräkning med balkrostmodell (Sektion C.6) bidrog som stöd för detta.

I Sektion 4.8 beskrivs ett skadefall där omfattande skjuvsprickbildning i tvärbalkar utformade såsom ett mellanting mellan platta och balk tolkas såsom orsakat av att hänsyn inte tagits till tvärkraftsvariationen kring pelarstöd.

I Kapitel 2 behandlas tvärkraft vid en rak fri kant. Här är det inte fråga om någon singularitet. Tvärkraften vid kanten utgörs av ett "basvärde" plus ett kanttillskott där tillskottet är lika med vridmomentet strax innanför kanten (kraft, i kN). Tillskottets bredd är olika beroende av elementstorleken men det integrerade värdet blir ungefär lika vid de olika elementstorlekarna. När mindlin-elementen är större samt när kirchoffelement tillämpas sätts kanttillskottet lika med vridmomentet på visst avstånd från kanten. God överensstämmelse hos de olika metoderna visas i exemplen. Kombinationen med basvärde och kanttillskott utläses tydligt ur exempel i Sektion 2.4. Kanttillskottet kan vara samverkande med basvärdet eller motverkande.

I Bilaga A ges armeringsanvisningar och kommentarer.

I Bilaga B härleds uttrycket för moment i cirkulär elastisk platta belastad med punktlast i mitten. Singular punkt påvisas.

I Bilaga C visas resultat av balkrostberäkningar av de olika plattorna. Medelmomenten inom bredd 1,0 eller 2,0 m motsvarade ungefär mindlinberäkningarna med elementstorleken 0,25 eller 0,125 m. Vid fritt inre hörn blev medelmomentet ungefär detsamma som med de olika elementstorlekarna i plattberäkningarna.

För tvärkraft vid rak fri kant påvisades god överensstämmelse med mindlin- och kirchoffberäkningarna.

I Sektion C.6 studerades tvärkraft invid fritt inre hörn. Detta tjänade som stöd för mindlinberäkningarna.

Avsikten med denna utredning är att den skall tjäna som en hjälp och en genväg i konstruktionsarbete genom olika beräkningsexempel där elementstorleken varierats. Utvärderingen och tolkningen av beräkningsresultaten ger förståelse för och anvisning om:

- elementtyper,
- elementstorlekar,
- justering av toppmoment och medelmoment,
- elastiska stöd,
- medverkande bredd,
- tilläggsfaktorer för genomstansningslaster, samt
- tvärkrafter vid fritt inre hörn och fria kanter.

6 Referenser

Pacoste, C., Plos, M., Johansson, M. (2012): *Recommendations for finite element analysis for the design of reinforced concrete slabs*, KTH Div of Struct Eng and Bridges, Rapport 144, 52 sidor, 2012.

Cook, R D., Malkus, D S., Plesha, M E., Witt, R J. (2001): *Concepts and applications of finite element analysis*, 4th ed, John Wiley & Sons, 719 sidor, 2001.

Hallbjörn, L. (1968): *Snedvinkliga brobaneplattor av armerad betong upplagda på pelare*, lic-avh, KTH Inst f Brobyggnad, 238 sidor, 1968.

Hallbjörn, L. (2015): *Betongplattor, beräkning och dimensionering*, KTH Bro- och stålbyggnad, rapport 154 och Luleå Tekn Universitet, Konstruktionsteknik, rapport K2002B-2015-1, 218 sidor, 2015.

SS-EN 1992-1-1:2005: *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner – Del 1-1 Allmänna regler och regler för byggande*.

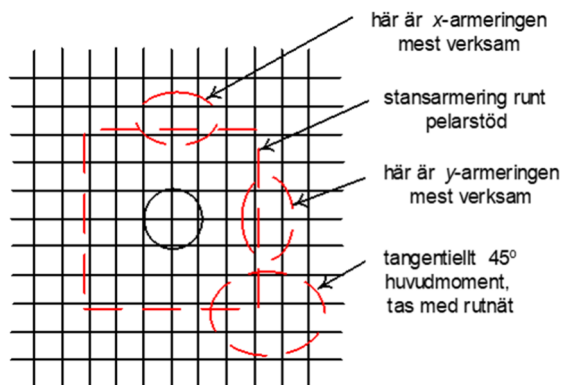
Kinnunen, S, Nylander, H. (1960): *Punching of concrete slabs without shear reinforcement*, KTH Transactions nr 158, 112 sidor, 1960.

Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1959): *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill, 580 sidor, 1959.

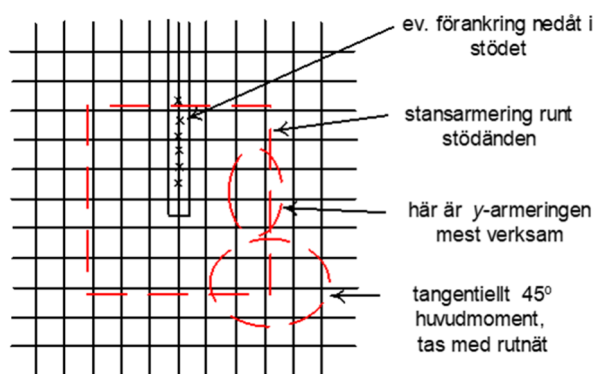
Bilaga A Armeringsanvisningar och kommentarer

A.1 Armering kring singular punkt

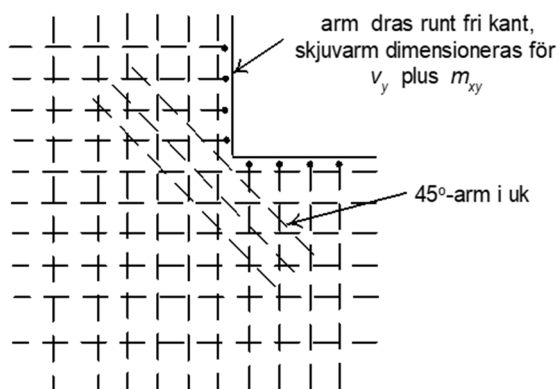
Nedan ges några anvisningar och kommentarer i anslutning till de studerade plattorna. Regler för inläggning av stansarmering ges i norm och behandlas inte här. Omlottskarvar har inte visats.



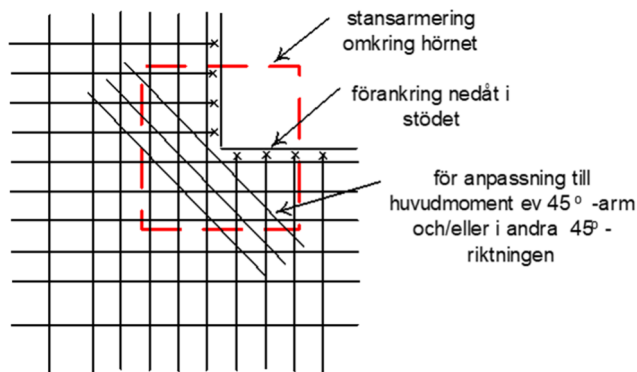
Figur A.1.1 Pelarstöd.



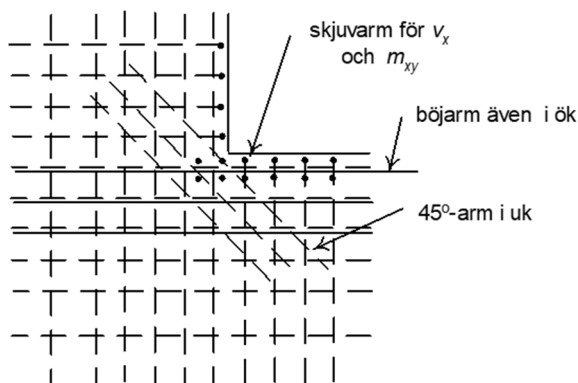
Figur A.1.2 Linjeupplags ände.



Figur A.1.3 Inåtgående fritt hörn.



Figur A.1.4 Inåtgående upplagt eller inspänt hörn.



Figur A.1.5 Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk. I denna modell (Sektion 2.3, 4.7 och C.6) blir hörnet markant tvärkraftsbelastat på så sätt att den högra delen av plattan tar stöd av den vänstra.

A.2 Komplettering med 45°-armering

Förstärkning av exempelvis fritt hörn kan ske med 45°-armering. När största huvudmomentet är riktat ungefär i 45°-riktningen är armering i denna riktning gynnsam m h t sprickbredder. Jämför med Sektion 3.4, inåtgående fritt hörn.

Utgående från beräknade medelmoment i strimlor fördelas bärförmågan på rutnätsarmering i x - och y -riktning samt på 45°-armering. Exempel avseende inåtgående fritt hörn:

$$x\text{-strimla: } m_x = 100 \quad m_{xy} = -30 \quad (\text{kNm/m})$$

$$y\text{-strimla: } m_y = 60 \quad m_{xy} = -40$$

Anm: Detta skulle ge dimensioneringsmomenten

$$m_{Ex} = 100 + |-30| = 130$$

$$m_{Ey} = 60 + |-40| = 100.$$

I en viss punkt på en platta har m_{xy} ett värde, men medelvärdena i strimlorna kan skilja något.

För 45°-armering väljer vi att dimensionera för böjmomentet = 30. Denna armering ersätter ett vridtillskott = 30 i såväl x - som y -armeringen.

Rutnätsarmeringen dimensioneras för

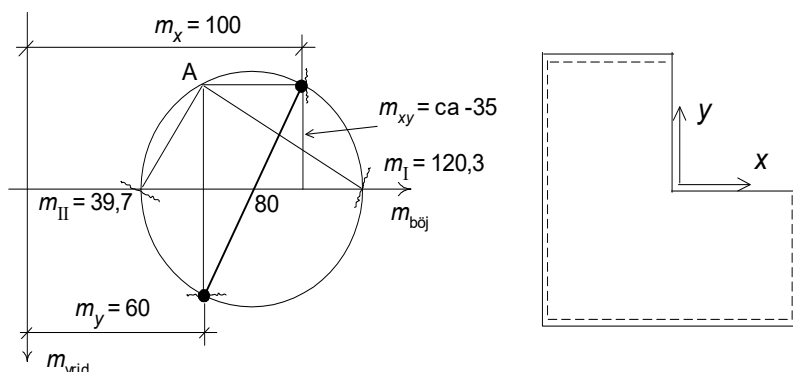
$$m_{Ex} = 100 + |0| = 100$$

$$m_{Ey} = 60 + |-10| = 70$$

A.3 Rutnätsarmering i avvikande riktningar

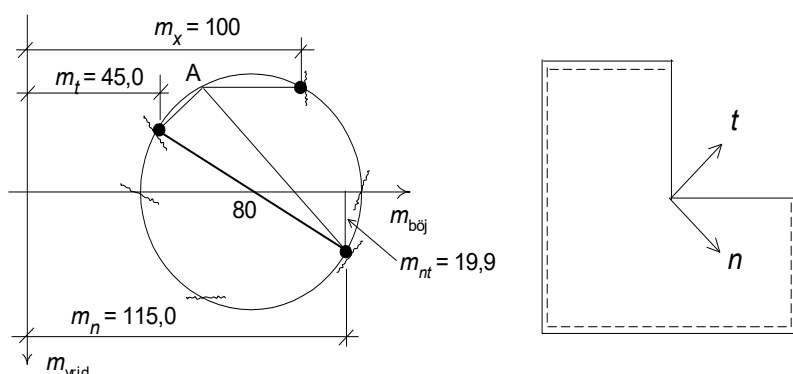
När armeringsriktningarna inte är överensstämmande med FEM-beräkningens resultat-riktningar kan omräkning ske. Detta behandlas i läroboken Hallbjörn (2015). Mohrs cirkel beskriver momenttillståndet. Tillvägagångssättet visas här i princip utan hänsyn till praktiska problem vid utförandet.

Mohrs cirkel för exemplet ovan framgår av Figur A.3.1. $m_{bøj}$ -axeln är orienterad i x -riktningen. Punkten A är utgångspunkt för inritning av spricksymboler.



Figur A.3.1 Mohrs cirkel. Spricksymboler jämte stömlinjer för dessa har medtagits.

Om man nu skulle armera enbart i de två vinkelräta 45° -riktningarna n och t kan m_n , m_t och m_{nt} avläsas ur Mohrs cirkel om man vrider den lutande diameterlinjen dubbla vinkeln, d v s $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ medsols. För en enskild punkt är det lämpligt att armera ungefär i huvudmomentriktningarna där vridmomentet är litet.

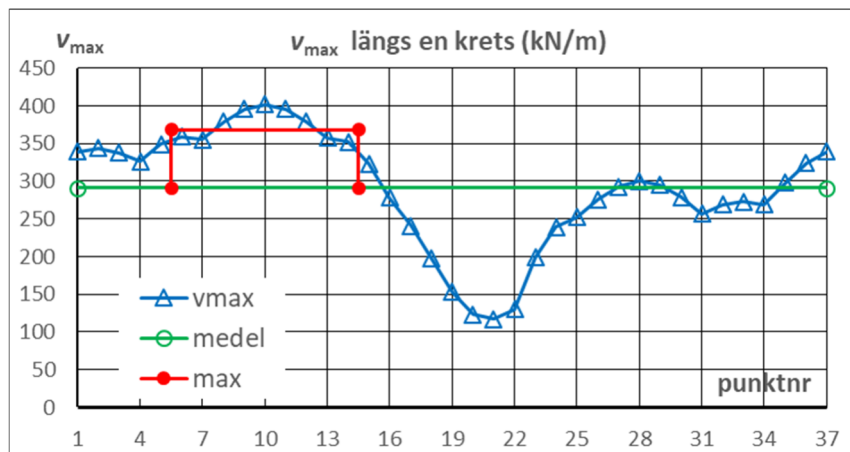


Figur A.3.2 Mohrs cirkel, snittkrafter i n - och t -riktningar.

Beroende på inställningar i FEM-beräkningen kan vid uppritning av cirkeln m_{xy} behöva teckenändras. Spricksymbolerna är då till hjälp.

A.4 Stansdimensionering, tilläggfaktor

Vid en tydlig variation hos huvudtvärkraften längs en krets runt en koncentrerad upplagsreaktion kan tilläggsfaktorn för stansningberäkningen bestämmas enligt följande exempel.



Figur A.4.1 Bestämning av tilläggsfaktor vid stansningsberäkning.

Huvudtvärkraftens medelvärde är 291.

Dess medelvärde i punkterna 6 t o m 14 är 368. Hänsyn har tagits till de i planen något varierande avstånden mellan punkterna.

Dimensionerande tvärkraft är 368.

Tilläggsfaktorn är alltså $368/291 = 1,26$.

I Eurokoden synes det vara underförstått att maxvärdet tillämpas på hela grundkontrollsnittet. När skjuvarmering behövs är det i vart fall olämpligt att utelämna skjuvarmering i en mindre påkänd sektor.

A.5 Förspänd platta

Om plattan är förspänd är följande att tänka på:

(Horisontella normaltryckspänningar av förspänning ökar stanskapaciteten.)

Förspänningskraften blir fördelad över en bredd som beror av kabelförankringarnas lägen och kan inte beräkningsmässigt styras in lokalt till ett stödområde även ifall kablarna är koncentrerade mot detta område.

(Inläggning av stansarmering beskrivs i norm och behandlas inte här.)

Om kabelkrafternas vertikalkomposant i stanssprickan tillgodoses vid bestämning av bärförmågan i stanshänseende skall genom måttsättning på ritning tillses att kablarnas höjd- och sidlägen blir de som förutsatts i beräkning. Avvikelse i utförande kan menligt påverka bärförmågan.

Bilaga B Cirkulär platta

B.1 Krökningsradier

Inledningsvis behandlas krökningsradier i en punkt A på en cirkulär platta med godtycklig rotationssymmetrisk last. Nedböjningsytan blir rotationssymmetrisk.

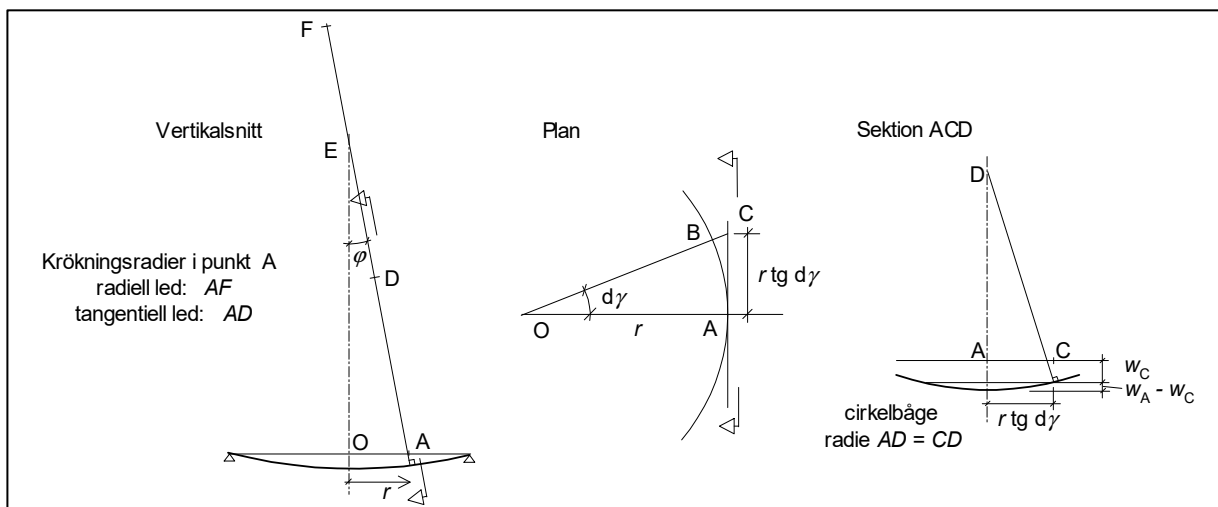
Krökningsradien $r_r = AF$ i radiell led beror av belastningen.

Krökningsradien $r_t = AD$ i tangentiell led längs AC söks.

Radiell koordinat betecknas r .

Krökningen är $\kappa_r = 1/r_r$ resp $\kappa_t = 1/r_t$.

Figurerna är schematiska. Radien AF är i verkligheten mycket stor jämfört med plattmåttet OA och vinkeln $d\gamma$ är mycket liten. Nedböjningen längs AC kan approximeras med en cirkelbåge vars krökningsradie söks.



Figur B.1.1

$$AC = r \cdot \operatorname{tg} d\gamma \quad OC = \frac{r}{\cos d\gamma} \quad BC = r \cdot \left(\frac{1}{\cos d\gamma} - 1 \right)$$

$$w_C = w_B + BC \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = w_A + r \cdot \left(\frac{1}{\cos d\gamma} - 1 \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \text{ är negativ} \right)$$

$$w_A - w_C = -r \cdot \left(\frac{1}{\cos d\gamma} - 1 \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial r}$$

Kordasatsen för sektion ACD.

$$r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 d\gamma = 2 \cdot AD \cdot (w_A - w_C) \quad (\text{mindre term har utgått})$$

$$\begin{aligned}
 AD &= \frac{r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 d\gamma}{-2r \cdot \left(\frac{1}{\cos d\gamma} - 1 \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial r}} = \frac{r \cdot \sin^2 d\gamma}{-2 \cdot \cos d\gamma \cdot (1 - \cos d\gamma) \cdot \frac{\partial w}{\partial r}} = \frac{r \cdot d\gamma^2}{-2 \cdot 1 \cdot \left(1 - 1 + \frac{d\gamma^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial r}} \\
 &= \frac{r}{-\frac{\partial w}{\partial r}} = \frac{r}{\varphi} = AE
 \end{aligned}$$

(Mindre termer i serieutvecklingar har utgått.)

Resultat: D sammanfaller med E och krökningsradien i tangentiell led är AE .

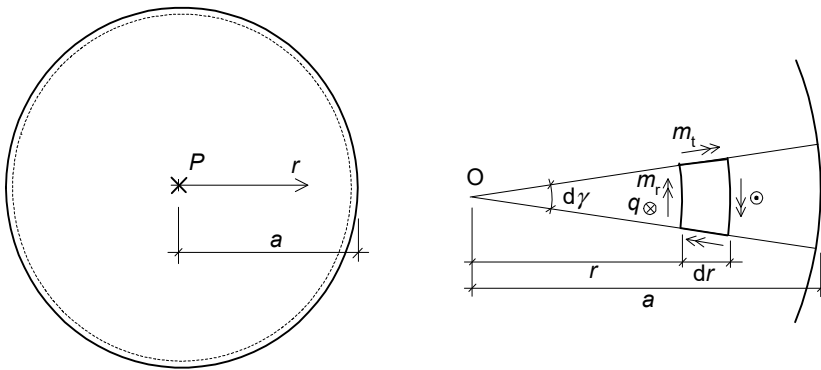
$$\text{Krökningen i radiell led är } \kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (\text{B.1.1})$$

$$\text{Ur Figur B.1.1 ovan erhålls } \frac{r}{AE} = \varphi = -\frac{\partial w}{\partial r} \text{ vilket ger}$$

$$\text{krökningen i tangentiell led } \kappa_t = \frac{1}{AE} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{B.1.2})$$

B.2 Cirkulär platta med punktlast

Nedan härleds formler för moment i en tunn fritt upplagd cirkulär platta med punktlast i centrum. Sätt, för enkelhets skull, tvärkontraktionstalet $\nu = 0$ varvid plattstyvheten blir $D = EI$.



Figur B.2.1.

$$\text{Radiellt resp tangentiellt moment: } m_r = -D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad m_t = -D \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}$$

Momentjämvikt för litet element enligt figur:

$$\begin{aligned}
 \left(m_r + \frac{\partial m_r}{\partial r} \cdot dr \right) \cdot (r + dr) \cdot d\gamma - m_r \cdot r d\gamma - m_t \cdot dr \cdot d\gamma + q \cdot r d\gamma \cdot dr &= 0 \\
 \Rightarrow m_r + r \cdot \frac{\partial m_r}{\partial r} - m_t + q \cdot r &= 0
 \end{aligned}$$

Sätt in uttrycken för m_r och m_t enligt ovan, dividera med $r \cdot D$.

$$\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{q}{D}$$

Vänstra ledet kan omformas:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = \frac{q}{D}$$

I Timoshenko, Woinowsky-Krieger (1959) anges detta allmänna uttryck för cirkulära plattor med rotationssymmetrisk last och den fortsatta behandlingen till punktlast sker där via platta med hål och med partiell lastutbredning. Här går vi direkt på fallet med punktlast.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = \frac{P}{2\pi r D} \quad \text{integreras}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{P}{2\pi D} \cdot (\ln r + C_1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{P}{2\pi D} \cdot (r \cdot \ln r + C_1 \cdot r) \quad \text{integreras}$$

$$r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P}{2\pi D} \cdot \left(\frac{r^2}{2} \cdot \ln r - \frac{r^2}{4} + C_1 \cdot \frac{r^2}{2} + C_2 \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P}{4\pi D} \cdot \left(r \cdot \ln r - \frac{r}{2} + C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{2}{r} \right)$$

För $r = 0$ gäller $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$. Termen $r \cdot \ln r$ går mot noll och C_2 blir noll.

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P}{4\pi D} \cdot \left(r \cdot \ln r - \frac{r}{2} + C_1 \cdot r \right) \quad \text{deriveras}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{P}{4\pi D} \cdot \left(\ln r + 1 - \frac{1}{2} + C_1 \right)$$

För $r = a$ gäller $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} - \ln a$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P}{4\pi D} \cdot (r \cdot \ln r - r - r \cdot \ln a) = -\frac{P}{4\pi D} \cdot \left(r \cdot \ln \frac{a}{r} + r \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{P}{4\pi D} \cdot \left(\ln r + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln a \right) = -\frac{P}{4\pi D} \cdot \ln \frac{a}{r}$$

Insättning i de inledande formlerna för moment ger de sökta uttrycken.

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \cdot \ln \frac{a}{r} \quad (\text{B.2.1})$$

$$m_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left(\ln \frac{a}{r} + 1 \right) \quad (\text{B.2.2})$$

Mot $r = 0$ växer momenten obegränsat och vi har där en singulär punkt.

Integrering av $\frac{\partial w}{\partial r}$ ger nedböjningen.

$$w = \frac{P}{4\pi D} \cdot \left(\frac{r^2}{2} \cdot \ln r - \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \cdot \ln a + C_3 \right)$$

För $r = a$ gäller $w = 0$, $\Rightarrow C_3 = \frac{3}{4} \cdot a^2$ och nedböjningen blir:

$$w = \frac{P}{16\pi D} \cdot \left(2r^2 \cdot \ln \frac{r}{a} + 3a^2 - 3r^2 \right) \quad (\text{B.2.3})$$

(Vid $r = 0$ blir termen $2r^2 \cdot \ln \frac{r}{a}$ lika med noll.)

B.3 Några formler för moment

I Timoshenko, Woinowsky-Krieger (1959) härleds och diskuteras många uttryck för elastiska plattor, bl a cirkulära. Nedan återges några av dem.

Fritt upplagd cirkulär platta med punktlast i mitten. Radien $= a$. Jämför Sektion B.2 ovan.

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \cdot (1 + \nu) \cdot \ln \frac{a}{r} \quad m_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left[(1 + \nu) \cdot \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right]$$

Fritt upplagd cirkulär platta med last P fördelad inom en centrisk cirkel med radien c . (Tvärkontraktionstalet ν har här satts $= 0$ för enkelhets skull.)

Toppmoment i centrum:

$$m_{\max} = \frac{P}{4\pi} \cdot \left(\ln \frac{a}{c} + 1 - \frac{c^2}{4a^2} \right)$$

Moment i den obelastade delen, $r > c$:

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \cdot \ln \frac{a}{r} + \frac{Pc^2}{16\pi} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad m_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left(\ln \frac{a}{r} + 1 \right) - \frac{Pc^2}{16\pi} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right)$$

Bilaga C Balkroster

C.1 Allmänt

Det är inte författarens mening att balkrostmodeller normalt skall användas för plattberäkningar i praktiken. FEM-modellerna med korsande och sammanbundna balkar (motsvarande plattstrimlor) med böj- och vridstyvhet utgör jämförelsevis mycket grova FEM-modeller som dock ger användaren en okomplicerad direktkontakt med konstruktionen. Böj- och vridstyvheter kan i modellen enkelt justeras även lokalt. Elastiska upplag och inspänningar kan modelleras. Kantbalk vid fri kant kan ingå. Metoden är tillämplig för konstruktioner med rätvinklig geometri. Resultaten motsvarar tvärkontraktionstalet $\nu = 0$. Vridstyvheten K_v hos balkarna skall sättas ungefär lika med $2 \cdot I_{\text{balk}}$ för att skapa likhet med en platta, se Hallbjörn (2015). Genom att här plattjocklek och balkbredd är ungefär lika blir detta villkor uppfyllt. Balkarnas skjuvdeformationer har medräknats.

Erhållna snittkrafter i balkarna invid knutpunkterna är något olika på ömse sidor om demsamma varför medelvärden bildas, vilka sedan divideras med balkbredden så att snittkrafterna för plattan erhålls. För vridmomentet är det något annorlunda. I x - och y -riktningen i en punkt på en platta är vridmomenten lika stora men med motsatta tecken. Ett exempel för en balkrost är följande: I punkt $x/y = -1/-1$ i ”Platta med linjeupplags ände”, Sektion C-2, är

vridmomenten i anslutande x -balkar 73,6 och 64,0 (medel 68,8) kNm och

vridmomenten i anslutande y -balkar -73,7 och -59,7 (medel -66,7) kNm.

En bästa utvärdering, baserad på alla fyra värdena, ger 67,8 kNm i x -balkar och -67,8 kNm i y -balkar. I följande redovisning för olika balkroster har dock utvärderingen för enkelhets skull skett utifrån endast två värden, vilket här ger 68,8 och -66,7 i x - resp y -balkar. Detta är en smärre approximation.

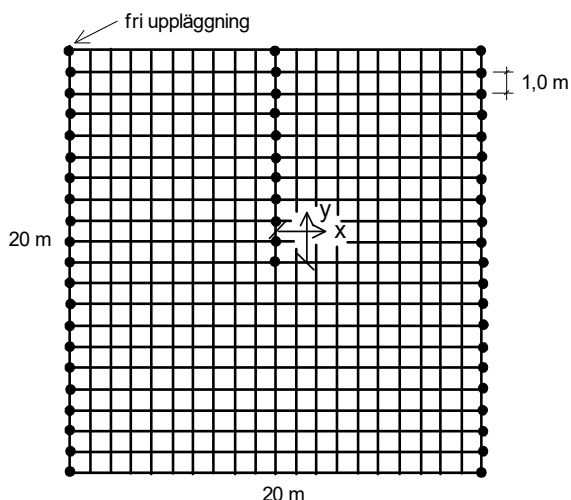
Vid monotont tilltagande eller avtagande snittkrafter längs en balk är medelvärdesbildningen lämplig. Vid topppunkter kan emellertid medelvärdesbildningen medföra att toppvärdet utsätts för en oriktig dämpning. Detta gäller vridmoment och tvärkrafter utgående från stapeldiagram samt böjmoment ifall språnget i knutpunkten är stort. Då kan en mera detaljerad redovisning behövas.

Anledningen till att denna bilaga medtagits är att se i vilken grad resultaten överensstämmer med strimlemoment och tvärkrafter i plattorna i Sektion 3 och 4.7.

C.2 Linjeupplags ände

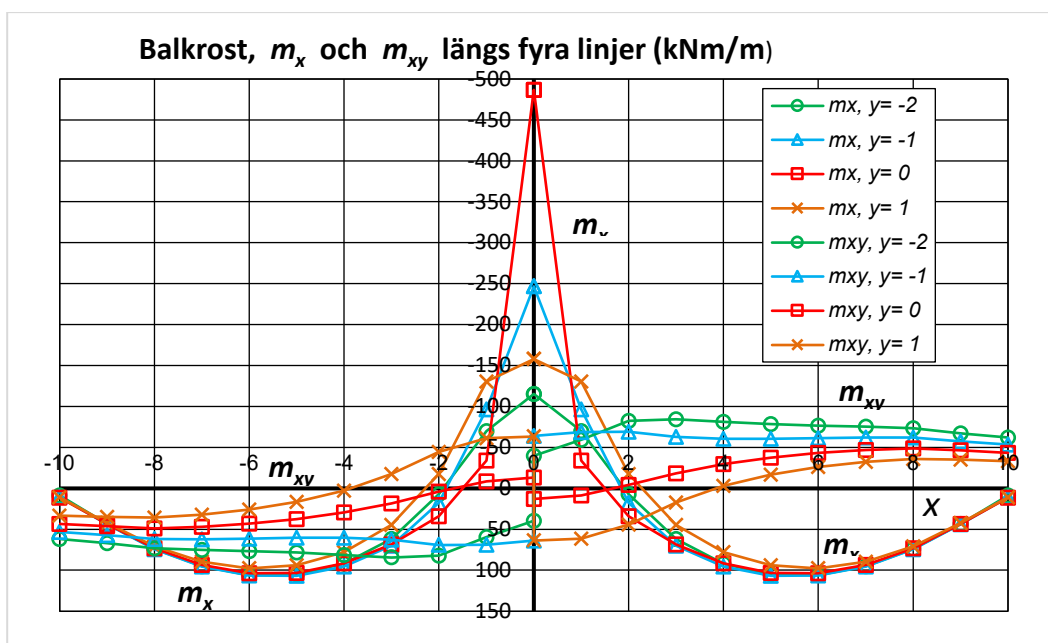
En balkrost enligt Figur C.2.1 med knutpunktslaster motsvarande $q = 10 \text{ kN/m}^2$ har beräknats för jämförelse. Den motsvarar plattan i Sektion 3.3 och 4.4. Balkrosten består av korsande och samverkande balkar med bredd 1,0 m, höjd 0,8 m och centrumavstånd 1,0 m. Här har höjden valts så att kravet $K_v \approx 2 \cdot I_{\text{balk}}$ uppfylls. I stödpunkterna råder fri uppläggning.

I detta fall är moment per meter lika med balkmoment.



Figur C.2.1 Balkrostmodell.

Böj- och vridmoment (kNm/m) längs fyra och tre linjer (balkar) i x - resp y -riktningen visas i diagram nedan såsom medelvärden i knutpunkterna (utom för $x = 0$ resp $y = 0$).



Figur C.2.2 Balkrost, moment i x -balkar (kNm/m), negativa värden uppåt.

En uppdelning av plattan i 1,0 m breda balkar kan anses vara lämplig för denna betongplatta och vi skall se hur resultatet stämmer med plattberäkningen med mindlinelement räknat som medelvärde för en 2,0 m bred strimla.

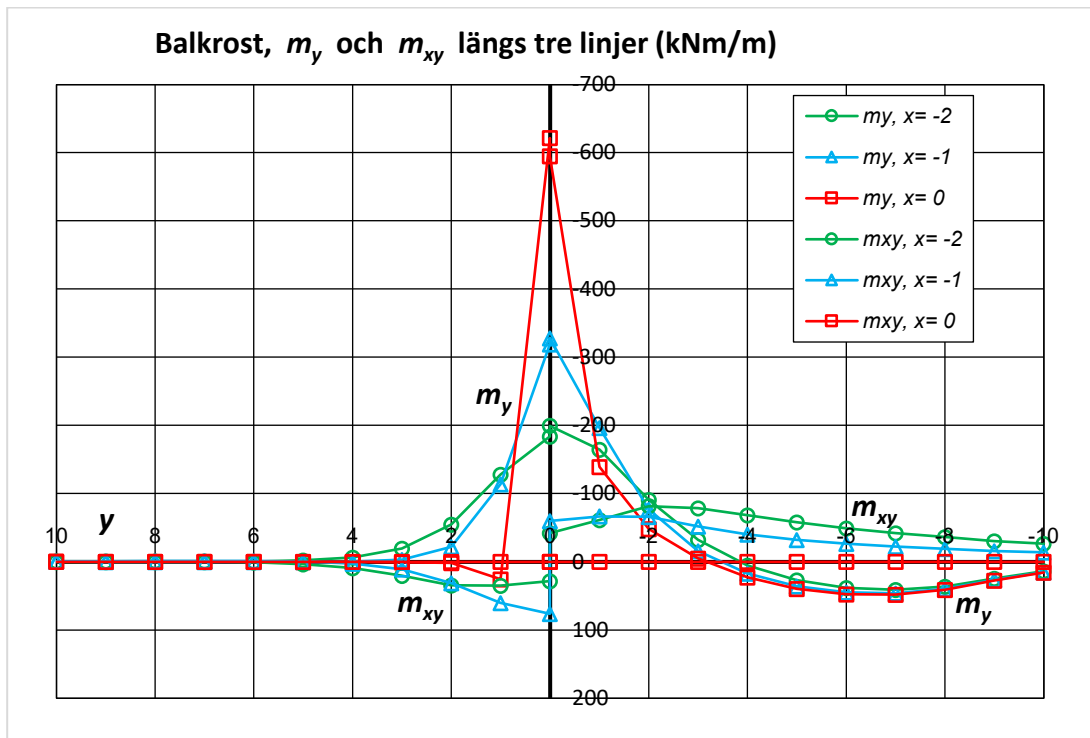
Tabell C.2.1 Balkrost, m_x längs $x = 0$.

	$y = 1,0$	$y = 0$	$y = -1,0$
m_x (kNm/m)	-158,1	-486,1	-246,9

Balkrost, strimla i x -riktning, 2,0 m bred, med centrum i $y = 0$:

$$m_{x,medel} = (-158,1 \cdot 0,5 - 486,1 \cdot 1,0 - 246,9 \cdot 0,5) / 2,0 = -344,3 \text{ kNm/m.}$$

Balkrostmodellen gav ett negativt medelmoment som är ungefär samma som plattmodellens (-341,7, Sektion 3.3) med elementstorlek 0,125x0,125 m.



Figur C.2.3 Balkrost, moment i y-balkar (kNm/m), negativa värden uppåt.

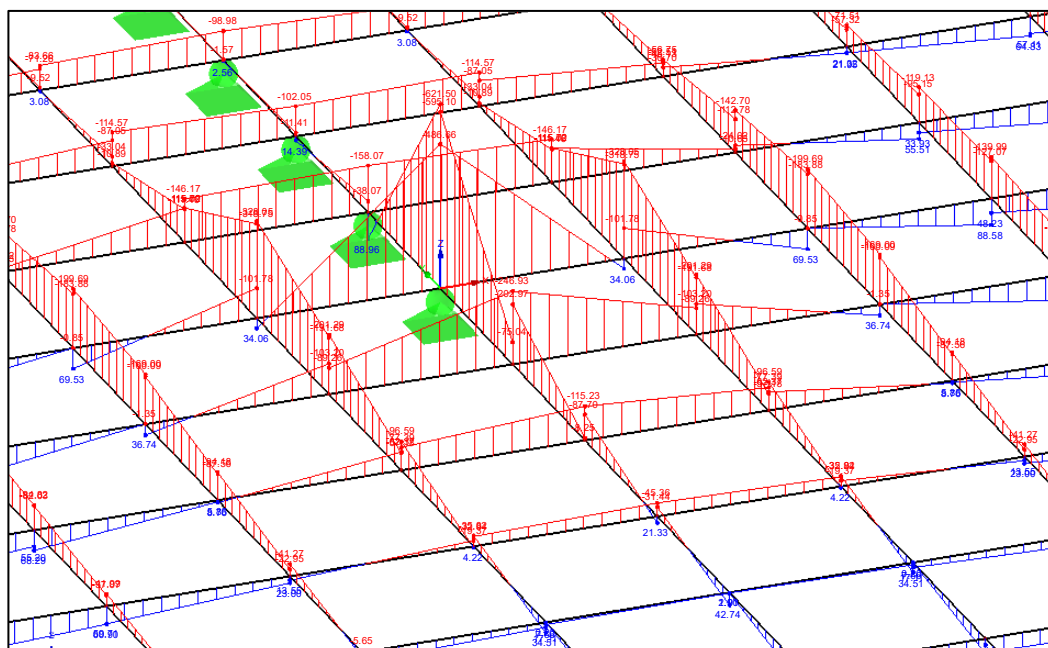
Tabell C.2.2 Balkrost, m_y längs $y = 0$.

	$x = -1,0$	$x = 0$	$x = 1,0$
m_y (kNm/m)	-323,4	-608,3	-323,4

Balkrost, strimla i y-riktning, 2,0 m bred, med centrum i $x = 0$:

$$m_{y,medel} = (-323,4 \cdot 0,5 - 608,3 \cdot 1,0 - 323,4 \cdot 0,5) / 2,0 = -465,9 \text{ kNm/m.}$$

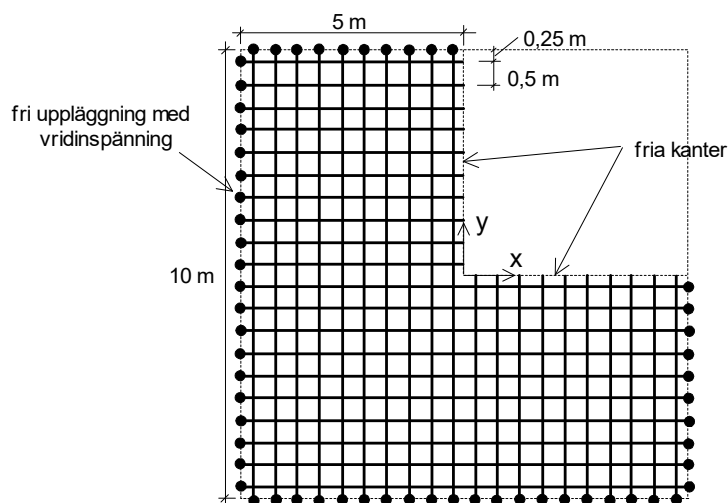
Balkrostmodellen gav ett negativt medelmoment som är ungefär samma som plattmodellens (-466,6, Sektion 3.3) med elementstorlek 0,25x0,25 m.



Figur C.2.4 M_x och M_y i balkar (kNm).

C.3 Inåtgående fritt hörn

En balkrost enligt Figur C.3.1 med knutpunktslaster motsvarande $q = 5 \text{ kN/m}^2$ har beräknats för jämförelse. Den motsvarar plattan i Sektion 3.4. Plattan är indelad i 20 + 20 strimlor och balkarnas centrumlinjer ligger i strimlornas centrumlinjer. Balkrosten består av korsande och samverkande balkar med bredd 0,5 m, höjd 0,4 m och centrumavstånd 0,5 m. I stödpunkterna råder fri uppläggning med inspänning för vridmoment.

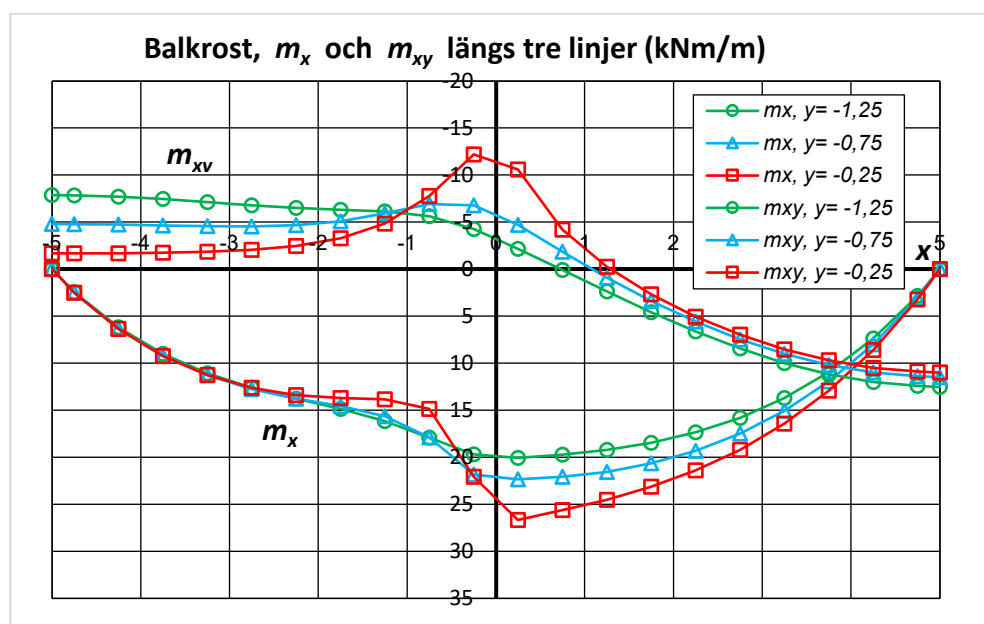


Figur C.3.1 Balkrostmodell.

Moment per meter har erhållits genom division med balkbredden 0,5 m.

Böj- och vridmoment (kNm/m) längs tre linjer (balkar) i x -riktningen ($y = -0,25$, $-0,75$ och $-1,25 \text{ m}$) visas i Figur C.3.2 såsom medelvärden i knutpunkterna.

En uppdelning av plattan i 0,5 m breda balkar kan anses vara lämplig för denna betongplatta (ungefär lika med plattjockleken) och vi skall se hur resultatet stämmer med plattberäkningen med mindlinelement räknat som medelvärde för en 1,0 m bred strimla.



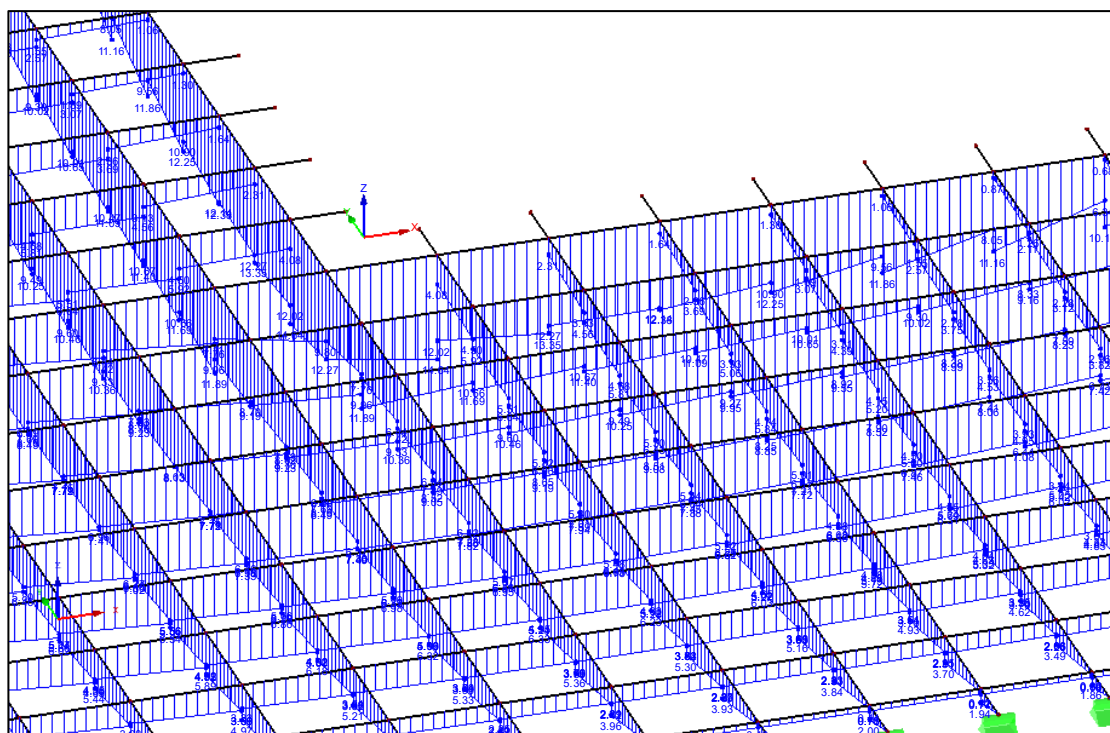
Figur C.3.2 Balkrost, moment i x -balkar (kNm/m), positiva värden nedåt.

Tabell C.3.1 Balkrost, m_x längs $x = 0,25$.

	$y = -0,25$	$y = -0,75$	$y = -1,25$
m_x (kNm/m)	26,7	22,4	20,1

Balkrost, strimla 1,0 m bred (två balkar), $m_{x,medel} = (26,7 + 22,4)/2 = 24,6$ kNm/m.

Detta är ungefär vad som erhöles med mindlinelementen med olika storlekar i Sektion 3.4 (24 à 27 kNm/m).



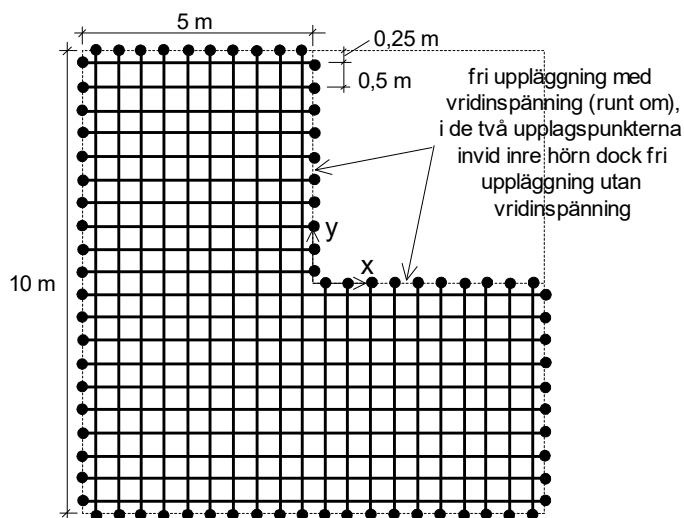
Figur C.3.3 M_x och M_y i balkar (kNm).

C.4 Inåtgående upplagt hörn

En balkrost enligt Figur C.4.1 med knutpunktslaster motsvarande $q = 10$ kN/m² har beräknats för jämförelse. Den motsvarar plattan i Sektion 3.5 och 4.5. Plattan är indelad i 20 + 20 strimlor och balkarnas centrumlinjer ligger i strimlornas centrumlinjer. Balkrosten består av korsande och samverkande balkar med bredd 0,5 m, höjd 0,4 m och centrumavstånd 0,5 m. I stödpunkterna råder fri uppläggning med inspanning för vridmoment utom i två upplagspunkter invid det inre hörnet där ingen vridinspanning infördes.

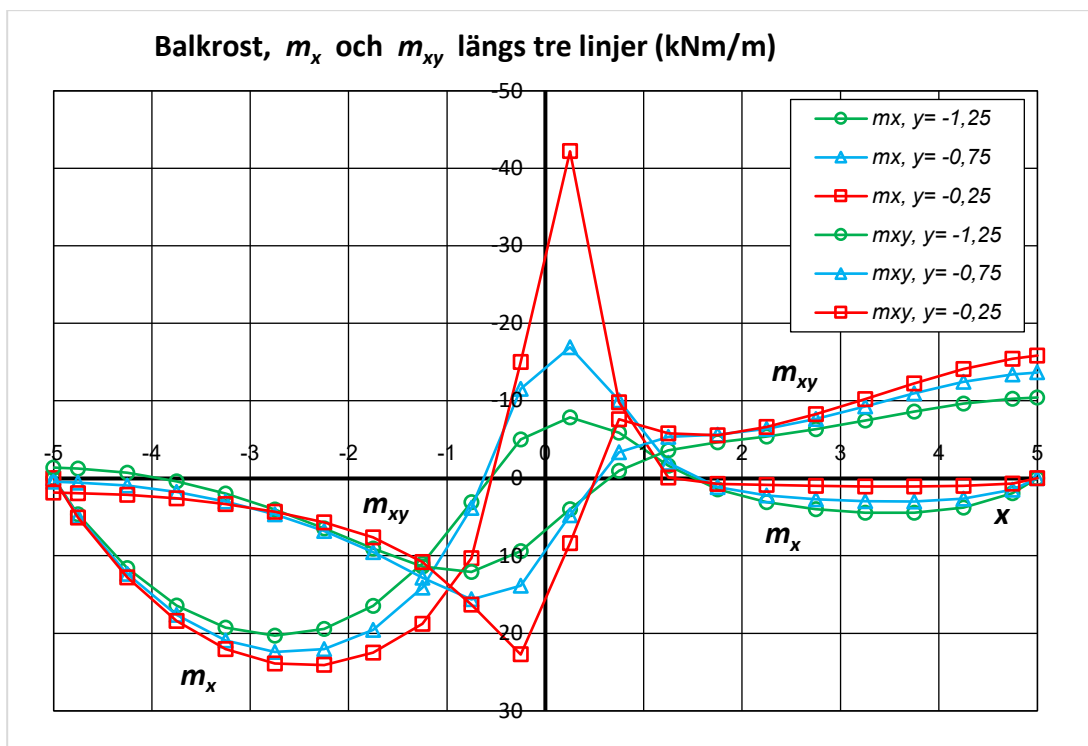
Moment per meter har erhållits genom division med balkbredden 0,5 m.

Böj- och vridmoment (kNm/m) längs tre linjer (balkar) i x -riktningen ($y = -0,25$, $-0,75$ och $-1,25$ m) visas i diagram såsom medelvärden i knutpunkterna.



Figur C.4.1 Balkrostmodell.

En uppdelning av plattan i 0,5 m breda balkar kan anses vara lämplig för denna betongplatta (ungefär lika med plattjockleken) och vi skall se hur resultatet stämmer med plattberäkningen med mindlinelement räknat som medelvärde för en 1,0 m bred strimla.



Figur C.4.2 Balkrost, moment i x-balkar (kNm/m), negativa värden uppåt.

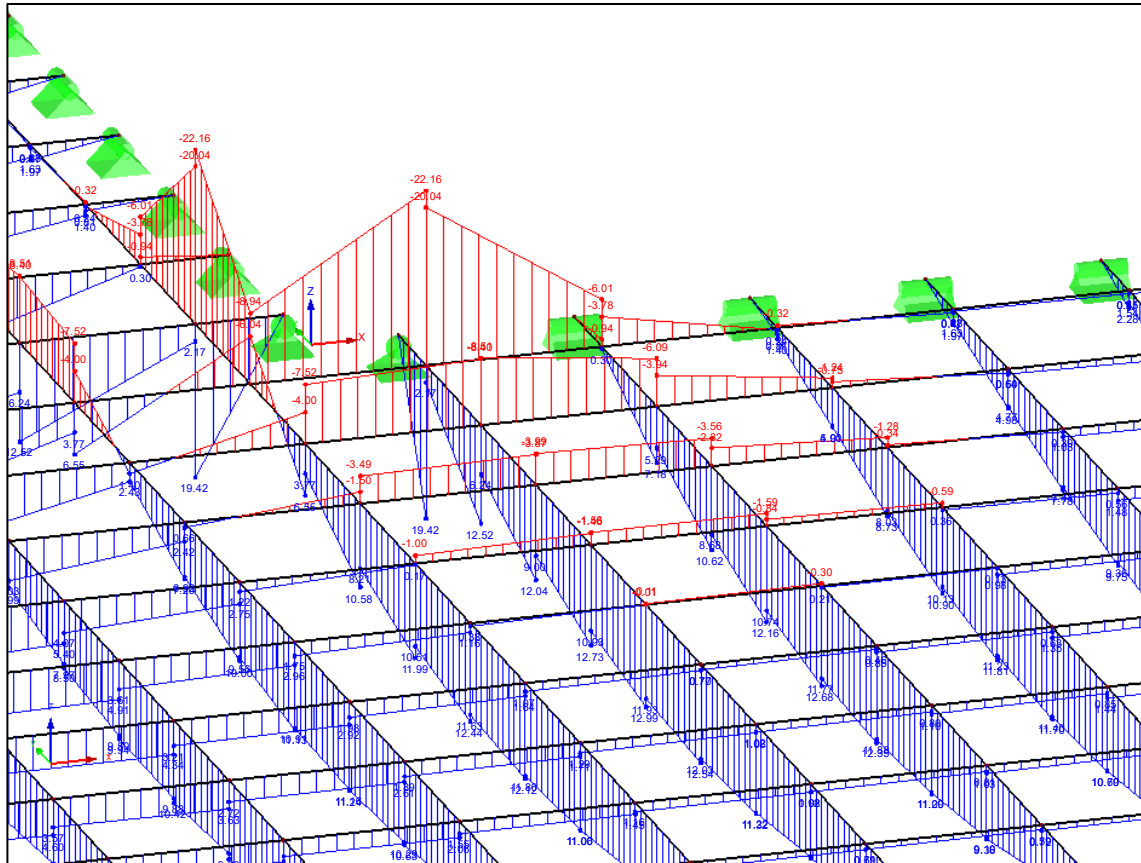
Tabell C.4.1 Balkrost, m_x längs $x = 0,25$ m.

	$y = -0,25$	$y = -0,75$	$y = -1,25$
m_x (kNm/m)	-42,2	-16,9	-7,9

Balkrost, strimla 1,0 m bred (två balkar), $m_{x,medel} = (-42,2 - 16,9)/2 = -29,6$ kNm/m.

Detta är ungefär vad som erhöles med mindlinelement 0,25x0,25 m (-33,0 och -30,0 kNm/m) i Sektion 3.5.

(Med vridinspända upplagspunkter även vid inre hörn i balkrosten erhöles $m_{x,model} = (-38,0 - 16,2)/2 = -27,1$ kNm/m. Där är värdet -38,0 medelvärde i ett kraftigt språng i momentkurvan från -55,8 till -20,1 kNm/m. Detta språng i x -led gör tolkningen osäker.)



Figur C.4.3 M_x och M_y i balkar (kNm).

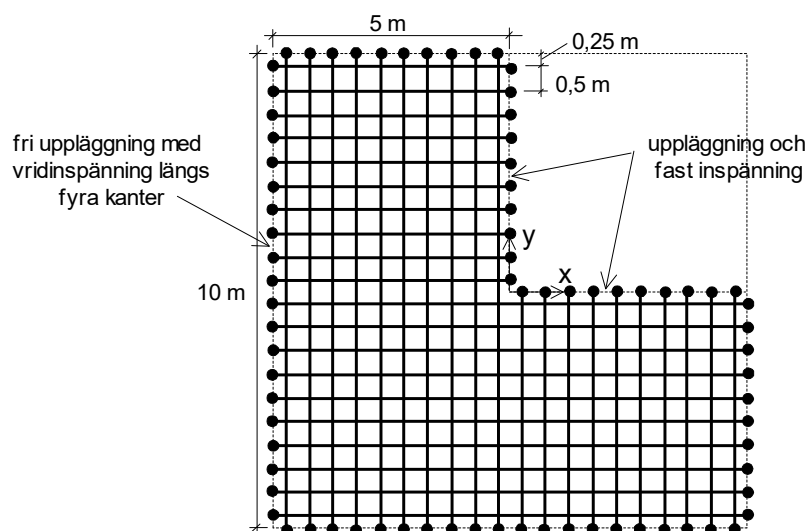
C.5 Inåtgående inspänt hörn

En balkrost enligt Figur C.5.1 med knutpunktslaster motsvarande $q = 10$ kN/m² har beräknats för jämförelse. Den motsvarar plattan i Sektion 3.6 och 4.6. Plattan är indelad i 20 + 20 strimlor och balkarnas centrumlinjer ligger i strimlornas centrumlinjer. Balkrosten består av korsande och samverkande balkar med bredd 0,5 m, höjd 0,4 m och centrumavstånd 0,5 m. Kanterna mot det inre hörnet är upplagda och fast inspända medan de övriga fyra kanterna är ledat upplagda och vridinspända.

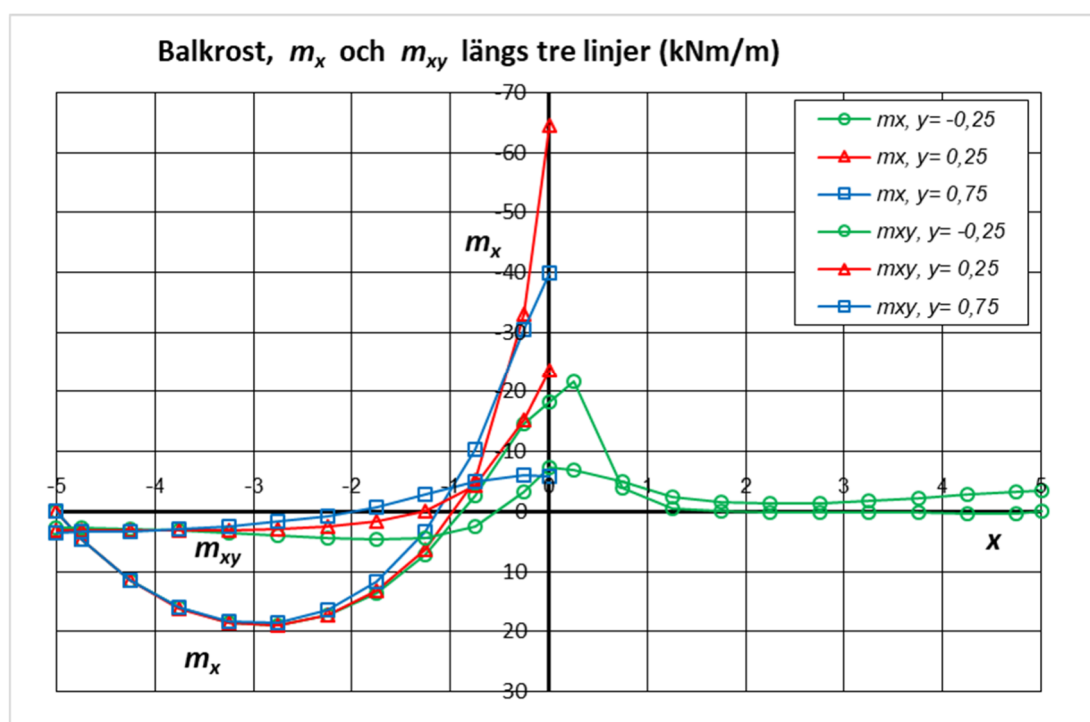
Moment per meter har erhållits genom division med balkbredden 0,5 m.

Böj- och vridmoment (kNm/m) längs tre linjer (balkar) i x -riktningen ($y = 0,75$, $0,25$ och $-0,25$ m) visas i Figur C.5.2 såsom medelvärden i knutpunkterna (utom längs $x = 0$).

En uppdelning av plattan i 0,5 m breda balkar kan anses vara lämplig för denna betongplatta (ungefär lika med plattjockleken) och vi skall se hur resultatet stämmer med plattberäkningen med mindlinelement räknat som medelvärde för en 1,0 m bred strimla.



Figur C.5.1 Balkrostmodell.



Figur C.5.2 Balkrost, moment i x-balkar (kNm/m), negativa värden uppåt.

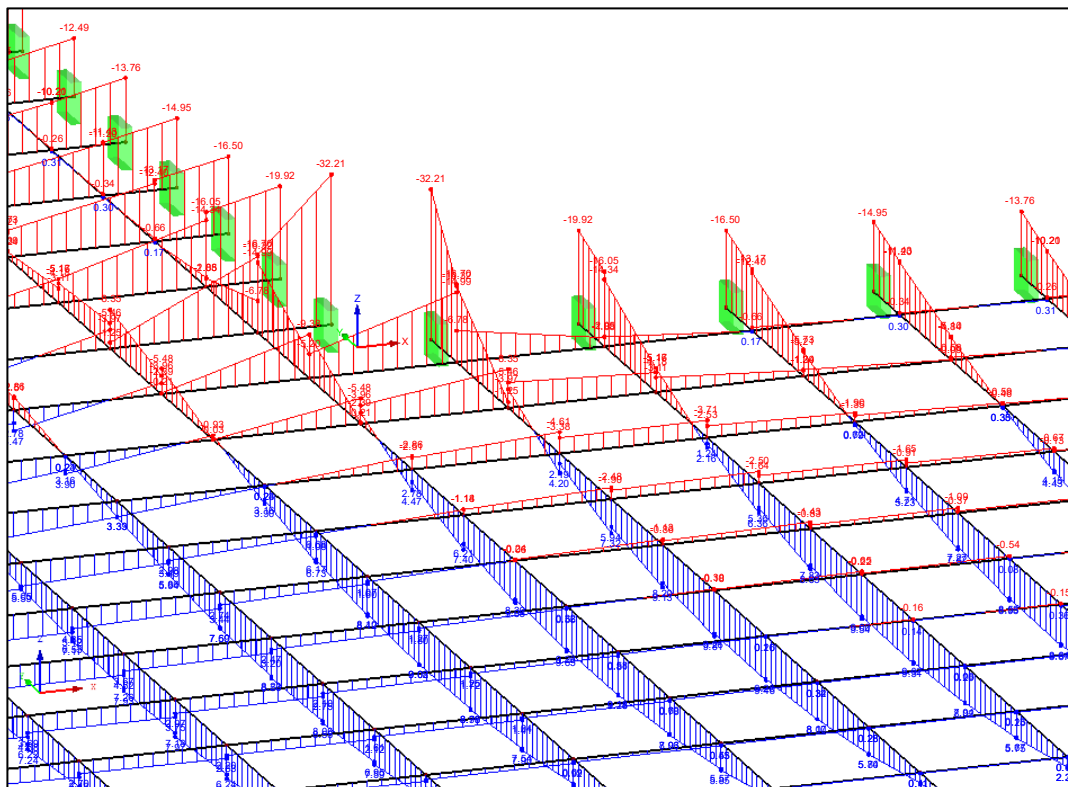
Tabell C.5.1 Balkrost, m_x längs $x = 0$.

	$y = 0,75$	$y = 0,25$	$y = -0,25$
m_x (kNm/m)	-39,8	-64,4	-18,2 interpolerat

Moment i $x = 0$ i en 1,0 m bred strimla i x-riktningen med centrum i $x/y = 0/0$:

$$m_{x,medel} = -64,4 \cdot 0,5 - 18,2 \cdot 0,5 = -41,3 \text{ kNm/m.}$$

Detta är ungefär vad som erhöles med mindlinelement $0,25 \times 0,25$ och $0,125 \times 0,125$ m (-39,2 resp -42,4 kNm/m) i Sektion 3.6.



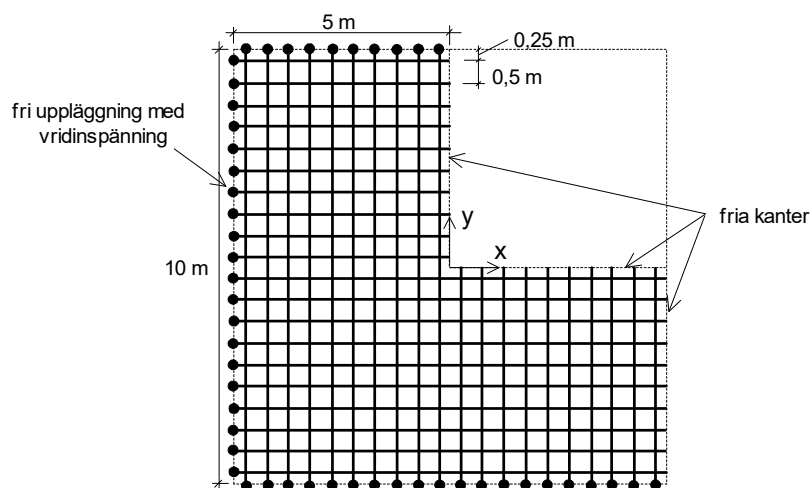
Figur C.5.3 M_x och M_y i balkar (kNm).

C.6 Inåtgående fritt hörn, osymmetrisk

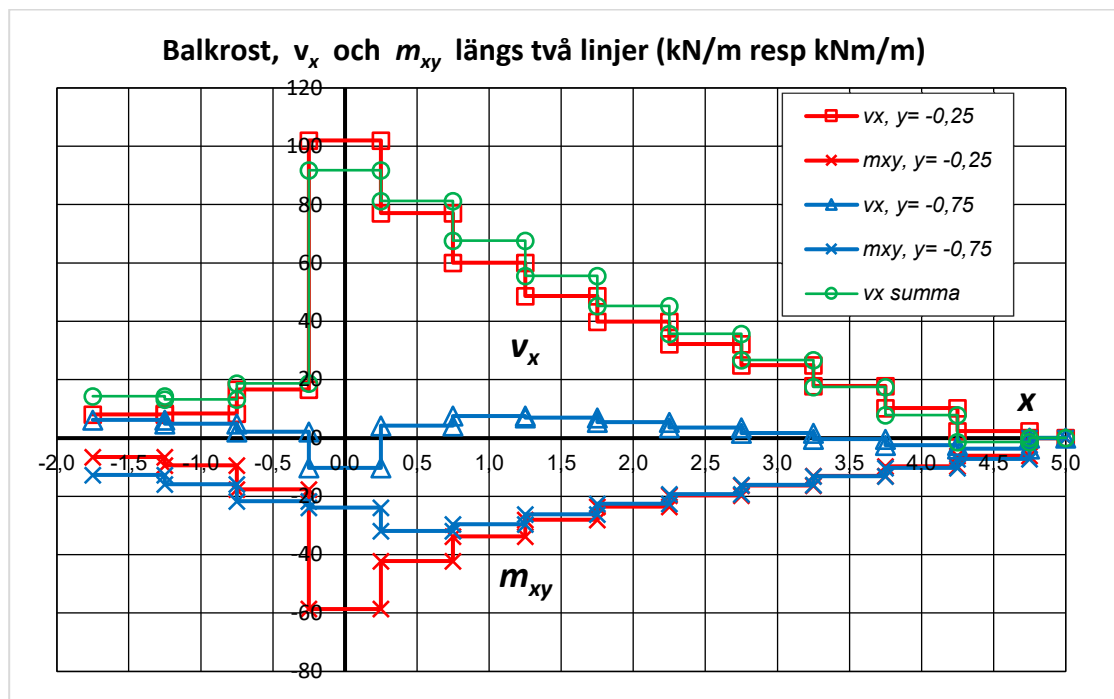
En balkrost enligt Figur C.6.1 med knutpunktslaster motsvarande $q = 5 \text{ kN/m}^2$ har beräknats för jämförelse. Den motsvarar plattan i Sektion 2.3 och 4.7. Plattan är indelad i 20 + 20 strimlor och balkarnas centrumlinjer ligger i strimlornas centrumlinjer. Balkrosten består av korsande och samverkande balkar med bredd 0,5 m, höjd 0,4 m och centrumavstånd 0,5 m. I stöd-punkterna råder fri uppläggning med inspänning för vridmoment.

Moment per meter har erhållits genom division med balkbredden 0,5 m.

Här studeras tvärkraft och vridmoment vid fri kant, närmare bestämt i balkarna $y = -0,25$ och $-0,75$.



Figur C.6.1 Balkrostmodell.



Figur C.6.2 Balkrost, tvärkraft och vridmoment i x -balkar (kN/m resp kNm/m), positiva värden uppåt.

Tvärkraftens toppvärde blev $V_x = 51,0 \text{ kN}$ vilket insatts som $51,0 / 0,5 = 102,0 \text{ kN/m}$ i diagrammet.

I Hallbjörn (2015) redovisas en balkrostberäkning av en vriden (hörnelastad) kvadratisk platta. Den totala kraft som överfördes från hörn till hörn var av jämviktsskäl lika med halva hörnelasten. Det visade sig att den yttersta balken tog 87,0 % och de följande balkarna 8,9 %, 2,8 % resp 1,1 % av den totala tvärkraften. Man kan säga att den yttersta och den andra balken tillsammans överförde lasten längs kanten (95,9 %).

Motsvarigheten i den här studerade plattan med inåtgående fritt hörn visas med grön kurva i diagrammet. Detta är " V_x summa" för båda balkarna fördelat på *en* balkbredd.

Den gröna summakurvan växer linjärt mot det inre hörnet.

I ett snitt 2,0 m från inre hörn blev summa tvärkraft i de två balkarna ($y = -0,25$ och $-0,75$) $19,9 + 2,7 = 22,6 \text{ kN}$, vilket stämmer väl med plattberäkningen i Sektion 2.3 där V_{x1} för 1,0 m bredd blev 19,9, 22,1 och 23,1 kN vid elementstorlekarna 0,5, 0,25 resp 0,125 m. Tvärkrafterna i linjer $y < -0,5$ är nära noll och värdet 22,6 motsvarar i detta fall kanttillskottet i plattberäkningen.

Vridmomentet i balkarna $y = -0,25$, $-0,75$ och $-1,25$ var i snitt $x = 2,0 \text{ m}$ -11,8, -11,3 resp -10,5 kNm. För de två yttersta balkarna är detta $(-11,8/0,5 - 11,3/0,5) / 2 = -23,1 \text{ kNm/m}$, vilket stämmer med kanttillskottet ovan. (Teckenändring skall ske vid tolkningen vid denna kant.)

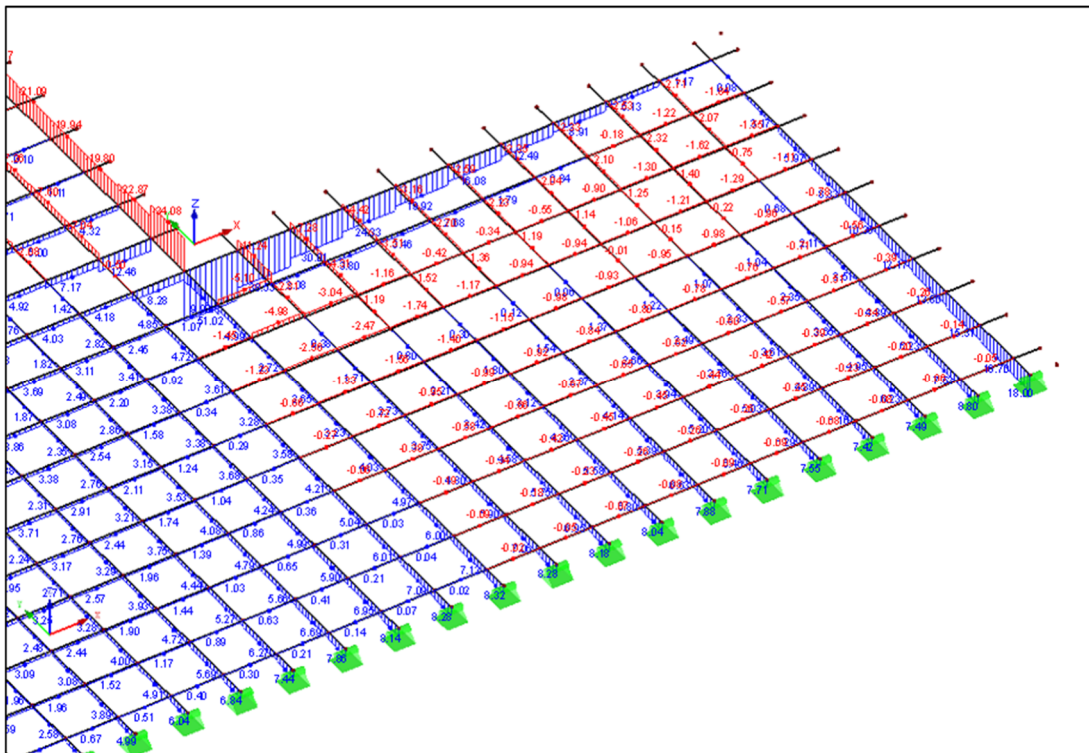
Resultaten tjänar som stöd vid tolkningen av tvärkrafter intill den singulära punkten i det inre hörnet i plattberäkningen, Sektion 4.7.

Tabell C.6.1 Tvärkrafter V_x (kN) i balkar.

	$x = 0$	$x = 0,5$	$x = 1,0$	$x = 1,5$	$x = 2,0$
$y = -0,25$	51,0	38,5	30,0	24,3	19,9
$y = -0,75$	-5,1	2,1	3,8	3,5	2,7
$y = -1,25$	-5,0	-3,0	-1,2	-0,4	-0,3
summa $y = -0,25$ och $-0,75$	45,9	40,6	33,8	27,8	22,6

Här har vi inga störningar i form av oroliga förlopp vid inre hörn. Vi prövar om summa V_x i balkarna $y = -0,25$ och $-0,75$ i snittet $x = 0$ kan uppskattas genom extrapolering utgående från värdena för $x = 1,0$ och $1,5$ m. Antag linjär tillväxt mot hörnet. Uppskattat värde i $x = 0$ blir $33,8 + 2 \cdot (33,8 - 27,8) = 45,8 \text{ kN} \approx 45,9$. Ok. Jämför med Figur 4.7.11 i Sektion 4.7.

Vid dimensionering för tvärkraft vid den fria kanten adderas *inte* vridmomentet eftersom plattans kanttillskott redan ingår i balkarnas tvärkrafter.



Figur C.6.3 Tvärkrafter i balkar (kN).

**INSTITUTIONEN FÖR ARKITEKTUR OCH
SAMHÄLLSBYGGNADSTEKNIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA**

Göteborg, Sverige 2019
www.chalmers.se



CHALMERS